第35卷 第2期 地球物理学报 Vol. 35, No. 2
1992年3月 ACTA GEOPHYSICA SINICA Mar., 1992

声波在两种多孔介质界面上的反射和透射

乔文孝 王 宁 严炽培
(石油大学数理系，山东东营 257062)

摘 要

本文导出了声波在两种多孔介质界面上反射、透射的一般计算公式. 作为例子，数值计算了 P_1 波入射于界面时，P_1、P_2 和 S 波的反射、透射系数与声波频率、入射角等量之间的关系. 结果表明，各种模式波的反射、透射系数与入射角、多孔介质性质有关，在 Biot 特征频率附近与频率有关，并用界面两侧的法向能流相等验证了结果的正确性. 若把多孔介质当作均匀固体处理，将会得到显著不同的结果.

关键词 反射，透射，多孔介质，声波.

一、引 言

与均匀固体的情形不同，在流体饱和多孔介质(如岩石、多孔陶瓷等)中可以存在3种体波：与均匀固体中纵波、横波类似的快纵波和横波，还有慢纵波. 简记为 P_1 波、P_2 波和 S 波. 各种波的波速、衰减均与多孔介质的参数有关[1,2]. 研究声波在多孔介质界面上的反射、透射对于地震勘探资料解释有重要的意义. 王耀俊等人用数值分析方法研究了高频声波由多孔固体入射于流体时的反射和透射[3]， Stoll 研究了声波由海水入射于海底沉积岩表面时的反射[4]. 本文研究了更为一般的情况，即研究了声波由一种多孔介质入射于另一种多孔介质时反射和透射，给出了计算反射、透射系数的一般方法和数值计算例子.

二、公 式 推 导

设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 分别表示声波在多孔介质中传播时固体骨架位移和流体相对于骨架的位移，并用势函数表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \nabla \phi_s + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_s, \\ \boldsymbol{w} &= \nabla \phi_f + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_f, \end{aligned} \tag{1}$$

式中 ϕ_s 和 $\boldsymbol{\psi}_s$ 分别为骨架部分的标势和矢势，ϕ_f 和 $\boldsymbol{\psi}_f$ 分别为流体部分的标势和矢势，并假定矢势满足 Lorentz 条件.

本文1990年5月14日收到，1991年5月11日收到修改稿.

1. 势函数表达式

如图 1，设 P_1 波自半无限大的多孔介质 1 入射于半无限大的多孔介质 2，在介质 1 和介质 2 中一般分别存在反射和透射的 P_1 波、P_2 波和 S 波，并且(1)多孔介质中骨架和流体部分均可存在三种体波，只是振幅和相位不同[5]；(2)由 Snell 定律可知，界面两侧介质中各种模式波的 x 方向波矢分量相等，记为 σ；(3)所有量与 y 方向无关，矢势函数只有 y 分量。

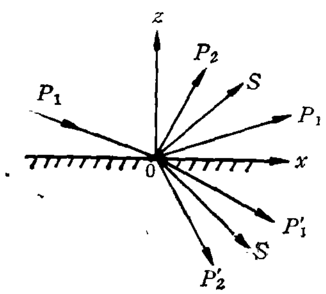

图 1　P_1 波在两种多孔介质界面上的反射和透射

于是，我们可以写出界面两侧的势函数，当 $z>0$ 时

$$\phi_s = R_1\exp(i\alpha_1 z) + B_{1i}\exp(-i\alpha_1 z) + R_2\exp(i\alpha_2 z), \tag{2}$$

$$\phi_f = m_1R_1\exp(i\alpha_1 z) + m_1B_{1i}\exp(-i\alpha_1 z) + m_2R_2\exp(i\alpha_2 z), \tag{3}$$

$$\psi_s = R_s\exp(i\alpha_s z), \tag{4}$$

$$\psi_f = m_sR_s\exp(i\alpha_s z); \tag{5}$$

当 $z<0$ 时

$$\phi'_s = T_1\exp(-i\alpha'_1 z) + T_2\exp(-i\alpha'_2 z), \tag{6}$$

$$\phi'_f = m'_1T_1\exp(-i\alpha'_1 z) + m'_2T_2\exp(-i\alpha_2 z), \tag{7}$$

$$\psi'_s = T_s\exp(-i\alpha'_s z), \tag{8}$$

$$\psi'_f = m_sT_s\exp(-i\alpha'_s z). \tag{9}$$

在式(2)—(9)中，略去了公共因子 $\exp[i(\sigma x-\omega t)]$，$R_1$、$R_2$ 和 R_s 分别为反射的 P_1、P_2 和 S 波的骨架部分势函数的振幅，T_1、T_2 和 T_s 分别为透射的 P_1、P_2 和 S 波的骨架部分势函数的振幅，m_1、m_2 和 m_s 分别为 P_1、P_2 和 S 波势函数的流体部分振幅与骨架部分振幅之比[3,4]，α_1、α_2 和 α_s 分别为 P_1、P_2 和 S 波的波矢沿 z 轴方向的分量，且有关系式

$$\alpha_1^2+\sigma^2=k_1^2,\qquad \alpha_2^2+\sigma^2=k_2^2,\qquad \alpha_s^2+\sigma^2=k_s^2.$$

其中 k_1、k_2 和 k_s 分别为 P_1、P_2 和 S 波的波数，上角标表示介质 2 的相应参数。

2. 边界条件

在不同参数的两种多孔介质界面上有 6 个边界条件[6]：(1) 骨架的法向位移连续，$u_z=u'_z$；(2) 骨架的切向位移连续，$u_x=u'_x$；(3)法向总应力连续，$\tau_{zz}=\tau'_{zz}$；(4) 切向总应力连续，$\tau_{xz}=\tau'_{xz}$；(5)流过界面的流体质量(m)连续；$m=\rho_f w_z=\rho_f w'_z$（ρ_f 为流体的密度)；(6)孔隙内流体压强连续，$p=p'$。

u_z、u_x、m 可分别用势函数表示为

$$u_z = \frac{\partial\phi_s}{\partial z}+\frac{\partial\psi_s}{\partial x}, \tag{10}$$

$$u_x = \frac{\partial\phi_s}{\partial x}-\frac{\partial\psi_s}{\partial z}, \tag{11}$$

$$m = \rho_f\left(\frac{\partial\phi_f}{\partial z}+\frac{\partial\psi_f}{\partial x}\right). \tag{12}$$

根据 Biot 理论[5]，并结合势函数的表示式，应力、流体压强的表示式为[4]

$$\tau_{zz} = H\nabla^2\phi_s - 2\mu\left(\frac{\partial^2\phi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_s}{\partial x\partial z}\right) - C\nabla^2\phi_f, \tag{13}$$

$$\tau_{xz} = \mu\left(2\frac{\partial^2\phi_s}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\psi_s}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_s}{\partial x^2}\right), \tag{14}$$

$$p = M\nabla^2\phi_f - C\nabla^2\phi_s, \tag{15}$$

其中 μ、H、M、C 均为与多孔介质特性有关的弹性系数[1].

3. 反射、透射系数

将势函数表达式(2)—(5)代入式(10)—(15),并令 $z=\varepsilon$(ε 为一无穷小量),可得介质 1 的下界面 u_z、u_x、τ_{zz}、τ_{xz}、m 和 p 的表达式

$$\begin{bmatrix} u_z \\ u_x \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xz} \\ m \\ p \end{bmatrix}_{z=\varepsilon} = [b]_{6\times4}\begin{bmatrix} R_1 \\ B_{1i} \\ R_2 \\ R_s \end{bmatrix}, \tag{16}$$

其中 $b_{11}=i\alpha_1$, $b_{12}=-i\alpha_1$, $b_{13}=i\alpha_2$, $b_{14}=i\sigma$, $b_{21}=i\sigma$, $b_{22}=b_{23}=i\sigma$, $b_{24}=-i\alpha_s$, $b_{31}=b_{32}=k_1^2(m_1C-H)+2\mu\sigma^2$, $b_{33}=k_2^2(m_2C-H)+2\mu\sigma^2$, $b_{34}=-2\mu\sigma\alpha_s$, $b_{41}=-2\mu\sigma\alpha_1$, $b_{42}=2\mu\sigma\alpha_1$, $b_{43}=-2\mu\sigma\alpha_2$, $b_{44}=\mu(\alpha_s^2-\sigma^2)$, $b_{51}=i\rho_f\alpha_1m_1$, $b_{52}=-i\rho_f\alpha_1m_1$, $b_{53}=i\rho_f\alpha_2m_2$, $b_{54}=i\rho_f\sigma m_s$, $b_{61}=(C-m_1M)k_1^2$, $b_{62}=b_{61}$, $b_{63}=(C-m_2M)k_2^2$, $b_{64}=0$.

类似地,把势函数表达式(6)—(9)代入式(10)—(15)并令 $z=-\varepsilon$,可得介质 2 上界面的 u_z、u_x、τ_{zz}、τ_{xz}、m 和 p 的表达式

$$\begin{bmatrix} u_z \\ u_x \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xz} \\ m \\ p \end{bmatrix}_{z=-\varepsilon} = [c]_{6\times3}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_s \end{bmatrix}, \tag{17}$$

其中 $c_{11}=-i\alpha_1$, $c_{12}=-i\alpha_2$, $c_{13}=c_{21}=c_{22}=i\sigma$, $c_{23}=i\alpha_s$, $c_{31}=k_1^2(m_1C-H)+2\mu\sigma^2$, $c_{32}=k_2^2(m_2C-H)+2\mu\sigma^2$, $C_{33}=2\mu\sigma\alpha_s$, $c_{41}=2\mu\sigma\alpha_1$, $c_{42}=2\mu\sigma\alpha_2$, $c_{43}=\mu(\alpha_s^2-\sigma^2)$, $c_{51}=-i\rho_f\alpha_1m_1$, $c_{52}=-i\rho_f\alpha_2m_2$, $c_{53}=i\rho_f\sigma m_s$, $c_{61}=k_1^2(C-m_1M)$, $c_{62}=(C-m_2M)k_2^2$, $c_{63}=0$ (略去了上角标). 根据边界条件,式(16)应与式(17)相等,即

$$[b]\begin{bmatrix} R_1 \\ B_{1i} \\ R_2 \\ R_s \end{bmatrix} = [c]\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_s \end{bmatrix}, \tag{18}$$

在式(18)中,令 $B_{1i}=1$,可得

$$[u]_{6\times 6}\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\R_s\\T_1\\T_2\\T_s\end{bmatrix}=[v]_{6\times 1}, \tag{19}$$

其中 $u_{i1}=b_{i1}$, $u_{i2}=b_{i3}$, $u_{i3}=b_{i4}$, $u_{i4}=-c_{i1}$, $u_{i5}=-c_{i2}$, $u_{i6}=-c_{i3}$, $v_i=-b_{i2}$ $(i=1,2,\cdots,6)$. 求解线性方程组(19)即可得 P_1、P_2 和 S 波的骨架部分势函数的反射系数 R_1、R_2、R_s 和透射系数 T_1、T_2、T_s.

根据位移与势函数的关系，可得骨架部分 P_1、P_2 和 S 波位移的反射系数的大小为

$$R_{s1}=|R_1|,\qquad R_{s2}=|k_2R_2/k_1|,\qquad R_{ss}=|k_sR_s/k_1|.$$

骨架部分 P_1、P_2 和 S 波位移的透射系数的大小为

$$T_{s1}=|k_1'T_1/k_1|,\qquad T_{s2}=|k_2'T_2/k_1|,\qquad T_{ss}=|k_s'T_s/k_1|.$$

流体部分 P_1、P_2 和 S 波位移的反射、透射系数的大小为

$$R_{f1}=|m_1R_1|,\qquad R_{f2}=|m_2R_{s2}|,\qquad R_{fs}=|m_sR_{ss}|,$$
$$T_{f1}=|m_1'T_{s1}|,\qquad T_{f2}=|m_2'T_{s2}|,\qquad T_{fs}=|m_s'T_{ss}|.$$

根据多孔介质中的声强[7]与势函数之间的关系，也可得到声强的反射系数、透射系数.

三、数值计算结果与校验

1. 计算结果

作为数值计算的例子，我们选用了水饱和熔结玻璃微珠样品的参数，见表 1. 这些参数与一般砂岩的参数相近. 分别改变频率、孔隙度、入射角，依 Biot 理论算出两种多孔介质的 k_1、k_2、k_s、m_1、m_2 和 m_s[1,4]，进而利用式(16)—(19)即可计算各种模式波的反射、透射系数.

表 1　水饱和熔结玻璃微珠样品的部分参数

骨架固体(玻璃)			孔隙内流体(水)			
密度 (kg/m³)	体变模量 (GPa)	切变模量 (GPa)	密度 (kg/m³)	体变模量 (GPa)	动力粘度 (mPa·s)	渗透率 (μm²)
2480	40.7	29.7	1000	2.20	1.009	1.0

(1) *频率的影响*　取 P_1 波的入射角为 10°，介质 1、2 的孔隙度分别为 0.1 和 0.4，两种介质的其它参数如表 1，频率的变化范围为 10—10^7Hz，计算得两种介质中波速、衰减的变化范围如表 2 所示. 图 2 表示了 R_{s1}、R_{s2}、R_{ss}、T_{s1}、T_{s2}、T_{ss} 分别与频率的依赖关系. 由图可见，在两种介质的特征频率之间(4.879kHz—175.6Hz 即 $10^{3.69}$Hz—$10^{5.24}$Hz)，频率的变化对反射、透射系数影响较大，而在此范围以外几乎无影响. 这是因为，在特征频率附近，骨架和流体部分的运动处于最佳耦合状态，声波发生弛豫现象：声速发生显著变化、单位波长声衰减出现极大值.

(2) 入射角的影响 我们取介质 1、2 的孔隙度分别为 0.1 和 0.4，声波的频率为 50kHz，两种介质的其它参数同表 1. P_1 波的入射角的变化范围为 0—90°，由 Biot 理论计算出两种介质的性质列于表 3. 计算得到的 R_{s1}、R_{s2}、R_{ss}、T_{s1}、T_{s2}、T_{ss} 用实线绘于图 3a，R_{f1}、R_{f2}、R_{fs}、T_{f1}、T_{f2}、T_{fs} 绘于图 3b. 由图 3 可见，当 P_1 波垂直入射于界面时，无反射、透射的 S 存在；当入射角接近于 90°时，只有"反射"的 P_1 波存在；位移的反射、透射系数均随入射角变化. 由图 3a 实线可见，R_{s2}(太小未在图上绘出)、T_{s2} 比 R_{s1}、R_{ss}、T_{s1}、T_{ss} 小得多，这表明 P_1 波、S 波主要存在于固体骨架部分；而由图 3b 可见，R_{f2}、T_{f2} 相对来说较大，这说明 P_2 波主要存在于孔隙内流体中.

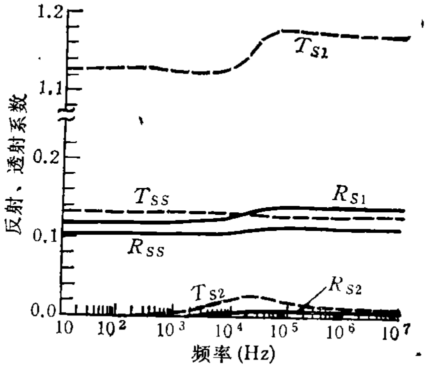

图 2 频率对各种模式波的骨架部分位移的反射、透射系数的影响

对于这两种介质，我们还对以下几种情况进行了数值研究:

表 2 两种介质的各种模式波的波速、衰减的变化范围、特征频率

	波速 (m/s)			衰减 (Np/m)			特征频率 (kHz)
	P_1	P_2	S	P_1	P_2	S	
介质 1	5280—5290	152—615	3180—3200	6.18×10^{-7}—0.385	4.15—1.48×10^3	1.06×10^{-6}—1.29	175.6
介质 2	3340—3480	85—1410	1870—2080	1.97×10^{-6}—21.0	0.742—926	8.78×10^{-6}—68.2	4.879

表 3 两种多孔介质的声学性质

	密度 (kg/m³)	波速 (m/s)			衰减 (Np/m)		
		P_1	P_2	S	P_1	P_2	S
介质 1	2260	5287	598.8	3193	8.24×10^{-2}	164.9	0.1964
介质 2	1840	3474	1161	2021	1.159	39.57	3.616

① 若这两种介质为均匀弹性固体，其密度、波速、衰减值如表 3 所示，并假设纵波从介质 1 入射于界面，则 P 波、S 波的反射、透射系数用虚线绘于图 3a. 由图中实线与虚线的比较可见，二者区别显著. 但随着频率的降低两者差别变小，频率低于 100Hz 时，二者几乎完全重合.

② 保持其它参数不变，当两种介质的孔隙度越接近时，透射系数变大，反射系数变小.

③ 若使 P_1 波从介质 2 入射于界面，只存在一个临界角.

④ 在两种介质的特征频率之间，P_2 波声强的反射、透射系数取得极大值，当入射角较小时比 S 波相应的系数大.

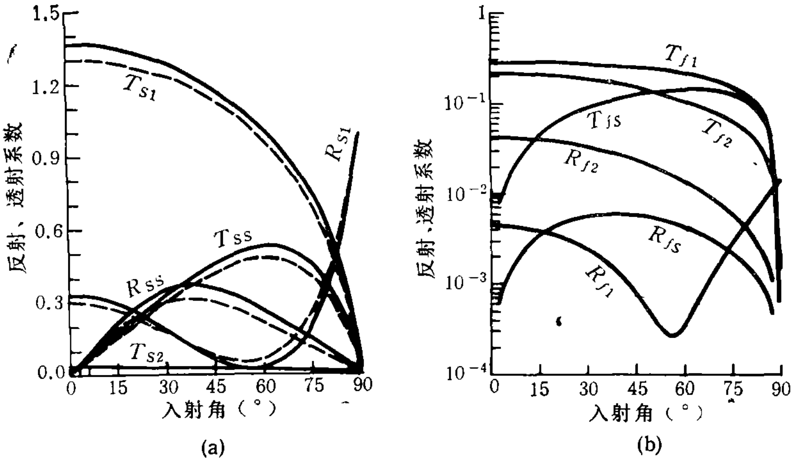

图 3　入射角对骨架部分位移(a)、流体部分位移(b)的反射、透射系数的影响

2. 结果的校验

为了校验计算结果的准确性，我们把所求得的各种模式波的反射、透射系数代回式(16)—(17)，利用文献[7]导出的声强公式计算界面两侧的法向能流[4]

$$W=\int_{t}^{t+2\pi/\omega}\left[\mathrm{Re}(\tau_{zz})\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)+\mathrm{Re}(\tau_{xz})\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)+\mathrm{Re}(p)\mathrm{Re}\left(\frac{\partial w_z}{\partial t}\right)\right]dt,$$

结果表明，对于以上的所有计算结果，两侧法向能流总是相等，从而说明计算结果的正确性.

四、结　论

本文从理论上研究了声波在两种多孔介质界面上的反射和透射，给出了计算反射、透射系数的一般方法. 数值计算了 P_1 波入射于界面时各种模式波的反射、透射系数与频率、入射角等参数之间的关系. 由于采用 Biot 理论，计算中实际考虑了界面两侧的多孔介质的许多参数(孔隙度、渗透率、流体粘度等)对最后结果的影响. 计算结果表明，在特征频率附近，频率的变化对声波的反射、透射有影响；入射角、多孔介质性质对声波的反射、透射影响较大；把多孔介质等效为均匀固体来研究声波的反射、透射时将引入较大误差. 本文的计算结果经验证符合能量守恒定律，因而是可信的.

参　考　文　献

[1] 乔文孝、王　琰，Biot 理论的数值计算，石油大学学报，**14**，126—132，1990.
[2] 乔文孝，流体饱和多孔介质中的声传播，石油大学学报，**13**，119—125，1989.
[3] 王耀俊等，多孔媒质界面上声波的反射和折射，声学技术，**8**，2，10—12，1989.
[4] Stoll, R. D., Reflection of acoustic wave at a water/sediment interface, *J. Acoust. Soc. Am.*, **70**, 149—156, 1981.

[5] Biot, M. A., Theory of propagation of elastic wave in a fluid-saturated porous solid, J. *Acoust. Soc. Am.*, **28**, 167—191, 1956.

[6] Deresiewicy, H. et al., On uniqueness in dynamic poroelasticity, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **53**,783—788, 1963.

[7] 杜光升、乔文孝,流体饱和多孔介质中的声强,石油大学学报,**15**,132—137,1991.

REFLECTION AND TRANSMISSION OF ACOUSTIC WAVE AT A POROUS SOLID/POROUS SOLID INTERFACE

Qiao Wen-xiao Wang Ning Yan Chi-pei

(The University of Petroleum, Dongying 257062, *Shandong)*

Abstract

The calculating formulas of reflection and transmission for plane acoustic wave on an interface between porous solid/porous solid are studied in this paper. The dependance of reflection and transmission coefficients of various bulk waves on acoustic frequency, incident angle, porous solid parameters etc. are calculated for the case that the incident wave is the first kind of compressional wave. The numerical investigation is checked by equilization of energy flux crossing interface in normal direction. Our results show that the reflection and transmission coefficients of various bulk waves are sensitive to incident angle of acoustic wave, medium properties as well as the frequency near the Biot critical frequency. The first kind of compressional wave and the second kind of compressional wave are mainly existed in frame and fluid respectively. Also, if the porous solid is simulated by isotropic solid, the results will be much different.

Key words Reflection, Transmission, Porous medium, Acoustic wave.