第37卷 第1期 地球物理学报 Vol. 37, No. 1
1994年1月 ACTA GEOPHYSICA SINICA Jan., 1994

论稳定电流场的入射、反射、透射间的关系

傅 平
(中国地质大学应用地球物理系，北京 100083)

摘 要

根据分界面上稳定电流场的边界条件，解稳定电流场 Laplace 方程，给出椭球形分界面入射场、反射场及透射场的表达式，并导出圆柱形、球形分界面上入射角、反射角及透射角的关系式后，指出，只在少数特殊情况下三者才相等，对一般形状的大多数光滑连续分界面情况，它们是不相等的。其值取决于分界面的具体形状。

关键词 稳定电流场，入射，反射，透射，折射。

一、引 言

为了研究异常场的分布规律，早在半个世纪前，人们就注意到，在稳定电流场建立或形成过程中，不同电阻率导电介质分界面上积累电荷对入射电场的畸变与反射作用[1]，在国内外一些物理学、场论和电法勘探教程中，用“镜像法”或“电像法”计算了几种简单分界面的“镜像”作用[2,5]，并引入了波动场中入射角、反射角、透射角、折射角及反射系数、透射系数等物理概念。近年来，一些研究者为了推动电法勘探的发展，提出了反射电法勘探[6]及对观测数据仿波动场的处理方法[7]等，但对以稳定电流场为物理基础的各种直流电法而言，尚未取得明显进展，迄今在入射角、反射角与透射角三者的大小关系上仍有不同研究结果和不同看法，在理论上探讨，以求澄清，无疑对电法勘探的发展将是有益的。

二、椭球形分界面上入射角、反射角及透射角间的关系

1. 椭球形分界面上入射场、反射场、透射场的表达式

设在电阻率为 ρ_1 的均匀各向同性导电介质中，有一个半轴长分别为 a、b、c 的椭球体，其电阻率为 ρ_2。为研究稳定电流场的矢量分布规律，取坐标原点位于椭球中心，x、y、z 轴分别与 a、b、c 重合，稳定电流场的正常场（或初始场）$\boldsymbol{E}_0$ 与 $\boldsymbol{j}_0$ 的矢量方向与 x 轴平行，在建场过程中，由于椭球体表面上迅速堆积了电荷，当稳定电流场在瞬间形成时，介质1、2中的稳定电流场均包含两部分：正常场及面电荷产生的异常场，经推导，在介质1中

本文1992年8月13日收到，1993年8月18日收到修改稿。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

任意点 $p(x,y,z)$ 处，稳定电场强度和电流密度沿各坐标轴方向的分量为[2,3]

$$\left.\begin{aligned} E_x^{(1)} &= [1+K(F+F'_x x)]E_0 = E_0 + E_{xf}, \\ E_y^{(1)} &= KF'_y E_0 x = E_{yf}, \\ E_z^{(1)} &= KF'_z E_0 x = E_{zf}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} j_x^{(1)} &= [1+K(F+F'_x x)]j_0 = j_0 + j_{xf}, \\ j_y^{(1)} &= KF'_y j_0 x = j_{yf}, \\ j_z^{(1)} &= KF'_z j_0 x = j_{zf}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{4\pi\rho_2 - (\rho_2 - \rho_1)\varphi}, \tag{3}$$

$$F = 2\pi abc \int_{t_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+t)\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}, \tag{4}$$

$$\varphi = 2\pi abc \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+t)\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}, \tag{5}$$

t_0 为以下方程的最大实根

$$\frac{x^2}{a^2+t_0} + \frac{y^2}{b^2+t_0} + \frac{z^2}{c^2+t_0} = 1,$$

式中的 E_{xf}、E_{yf}、E_{zf}、和 j_{xf}、j_{yf}、j_{zf} 为异常场或反射场分量；

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F'_y = \frac{\partial F}{\partial y},\ F'_z = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

在介质 1 中，由椭球分界面上面电荷产生的异常电流场或反射电流场的矢量形式为

$$\boldsymbol{E}_f = E_{xf}\boldsymbol{i}^0 + E_{yf}\boldsymbol{j}^0 + E_{zf}\boldsymbol{K}^0, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{j}_f = j_{xf}\boldsymbol{i}^0 + j_{yf}\boldsymbol{j}^0 + j_{zf}\boldsymbol{K}^0, \tag{7}$$

式中

$$E_{xf} = K(F + F'_x x)E_0,$$

$$j_{xf} = K(F + F'_x x)j_0,$$

而 $\boldsymbol{i}^0$、$\boldsymbol{j}^0$、$\boldsymbol{K}^0$ 为电流场沿 x、y、z 轴的单位矢量。

在椭球分界面内部的介质 2 中，正常电流场及透射电流场均只有沿 x 轴方向的分量

$$E_t = (1 + K\varphi)E_r, \tag{8}$$

$$j_t = (1 + K\varphi)j_r, \tag{9}$$

这里 E_t 和 j_t 为透射电场强度及透射电流密度，$E_r(=E_0)$ 和 $j_r(=j_0)$ 为入射（或正常）电场强度和电流密度。

由于 j_t（或 E_t）和 j_r（或 E_r）均与 x 轴平行，故其矢量方向相同，因此，在上述坐标定义情况下，对 a、b、c 为任意值的均匀电流场中各种椭球分界面，均有入射角与透射角相等的关系存在。

在椭球表面或分界面上任一点处，入射电流场（E_r、j_r）和反射电流场（E_f、j_f）及透射电流场（E_t、j_t）与分界面法线之夹角，定义为入射角 α、反射角 β 及透射角 γ，它们的数值大小均为观察点坐标的函数。对 a、b、c 为任意大小关系的各种不同分界面情况，α、β、γ 一般不具有简单的相等关系。其大小关系由分界面形状决定。为此，只要对椭球分

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

界面的两种特殊形状(水平圆柱形和球形)进行具体的数理剖析,便可得到证实.

2. 圆柱形分界面上入射角、反射角及透射角间的关系

走向无限长的圆柱形, $a = c = r_0$ 及 $b = \infty$, 这时 $K = \frac{1}{2\pi}\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$, $\varphi = 2\pi$, 于是公式(6)—(9)均大为简化.

如图1所示,当用极坐标表示观察点位置时,经简化后导出,在介质1中柱体分界面上,由面电荷在矢径 R(法向)及与其相垂直方向(切向)上的反射电场强度与反射电流密度为

法向
$$\left.\begin{aligned} E_{Rf} &= -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\cos\alpha E_r, \\ j_{Rf} &= -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\cos\alpha j_r, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

切向
$$\left.\begin{aligned} E_{\theta f} &= -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\sin\alpha E_r, \\ j_{\theta f} &= -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\sin\alpha j_r, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

反射电流场的矢量
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_f &= E_{Rf}\boldsymbol{R}^0 + E_{\theta f}\boldsymbol{\theta}^0, \\ \boldsymbol{j}_f &= j_{Rf}\boldsymbol{R}^0 + j_{\theta f}\boldsymbol{\theta}^0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

式中 $\boldsymbol{R}^0$、$\boldsymbol{\theta}^0$ 为 $\boldsymbol{E}_f$ 和 $\boldsymbol{j}_f$ 沿法向和切向方向的单位矢量.

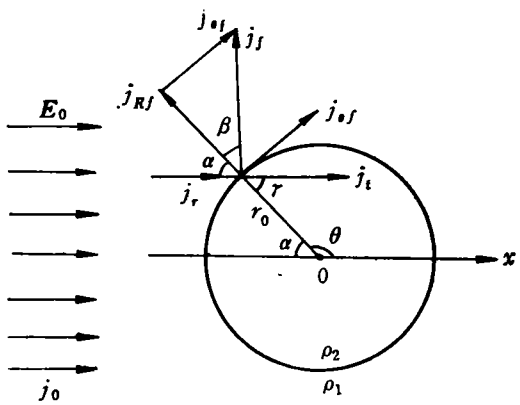

图1 柱体分界面上矢量分布示意图
(均匀稳定电流场)

分析(10)、(11)式,圆柱形分界面对入射电流场的反射系数为 $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ 与 $\cos\alpha$(法向)或 $\sin\alpha$(切向)之积,它与无限平面情况相比较,仅电性成份 $\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\right)$ 有相同形式[2,3,4];而反映分界面作用的几何成份却是不同的;法向反射场与入射角 α 有余弦关系,当 $\alpha = 0$ (在 x 轴上)时有极大,当 $\alpha = 90°$ 时, $\cos\alpha = 0$, 这时无反射;切向反射场与入射角有正弦关系,当 $\alpha = 90°$ 时,切向反射场极大,当 $\alpha = 0$ 时,无切向反射场. 此外,当 $\rho_2 = \infty$ 时,电性成份的反射作用最强(全反射).

在圆柱体内部的介质2中,稳定电流场的透射电场强度和透射电流密度只有沿 x 轴方向的分量

$$\left.\begin{aligned} E_t &= \frac{2\rho_2}{\rho_2 + \rho_1}E_r, \\ j_t &= \frac{2\rho_1}{\rho_2 + \rho_1}j_r, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

可见，透射电流场在圆柱形分界面上的透射系数与无限平面情况相同[3]，当 $\rho_2=0$ 时，$E_t=0$ 及 $j_t=2j_r$，这时分界面对电流的透射作用最强；当 $\rho_2=\infty$ 时，$E_t=2E_r$ 及 $j_t=0$，这时稳定电流已无透射作用，此时的 E_t 虽较 E_r 大一倍，但非为稳定电流场，而为静电场。

如图 1 所示，当取反射电场强度或反射电流密度其反射角的正切表达式时，则由式(10)和(11)得

$$\tan\beta=\frac{E_{\theta f}}{E_{Rf}}=\frac{j_{\theta f}}{j_{Rf}}=\tan\alpha, \tag{14}$$

由(14)式可得出结论：在均匀稳定电流场中光滑连续的圆柱状分界面上，任意点的入射角与反射角均是相等的

$$\alpha=\beta, \tag{15}$$

由于 $\alpha=\gamma$，故圆柱状分界面上任一点入射角、反射角、透射角三者有相等关系

$$\alpha=\beta=\gamma, \tag{16}$$

此式表明，α、β、γ 三者相等的关系不但适合众所周知的无限平面情况，而且也适用于走向无限长的圆柱状分界面情况。

3. 球形分界面上入射角、反射角及透射角间的关系

对 $a=b=c=r_0$ 的椭球形分界面情况，这时 $\varphi=\frac{4}{3}\pi, K=\frac{3}{4\pi}\frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}$，使公式(6)—(9)更为简化．得到球形分界面上反射电场强度与反射电流密度在两互相垂直方向上的分量

$$\left.\begin{aligned}E_{Rf}&=-2\frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}\cos\alpha E_r,\\ j_{Rf}&=-2\frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}\cos\alpha j_r,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}E_{\theta f}&=-\frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}\sin\alpha E_r,\\ j_{\theta f}&=-\frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}\sin\alpha j_r,\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

由以上两式得到入射角与反射角之间有以下重要关系式

$$\tan\beta=\frac{E_{\theta f}}{E_{Rf}}=\frac{j_{\theta f}}{j_{Rf}}=\frac{\frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}\sin\alpha j_r}{2\frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}\cos\alpha j_r}=\frac{1}{2}\tan\alpha, \tag{19}$$

可见球形分界面反射角的正切恰为入射角正切的二分之一．上式也可写成

$$\beta=\arctan\frac{\tan\alpha}{2},$$

即有不等关系

$$\alpha>\beta, \tag{20}$$

如当入射角 $\alpha=45°$ 时，反射角 β 仅约 $26°36'(<\alpha)$。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由以上各式可得出重要结论：在均匀稳定电流场中光滑连续的球形分界面上，任意点（$\alpha \neq 0$）的入射角与反射角均不相等，（$\alpha \neq \beta$）。

至此充分证明，公式(16)所表达的 α、β、γ 三者相等的关系不具有普遍性，即不是对任何形状的光滑连续分界面均适用，不宜推广到任何地电条件的普遍情况之中[8]。

此外，在球形分界面内部的导电介质 2 中，透射电流场也只有 x 轴分量，其表达式为

$$\left.\begin{aligned} E_t &= \frac{3\rho_2}{2\rho_2+\rho_1}E_r, \\ j_t &= \frac{3\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}j_r, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

分析公式(10)、(11)、(13)和(17)、(18)、(21)可见，球形分界面的电性反射系数$\left(\text{法向为 } 2\frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1} \text{ 切向为 } \frac{\rho_2-\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}\right)$和透射系数$\left(\text{电场强度的为 } \frac{3\rho_2}{2\rho_2+\rho_1}\text{，电流密度的为 } \frac{3\rho_1}{2\rho_2+\rho_1}\right)$，均较圆柱状分界面情况的表达关系式要复杂些，它们是不相等的，与无限平面情况更不能等同看待。

还应强调指出，在等轴状球形和走向无限长的圆柱形分界面之间，乃包含着横截面（$a=c=r_0$ 的圆）相同而沿走向有各种不同长度（b 为 $r_0-\infty$）的拉长椭圆柱状分界面情况，细分起来，可视为无限多个不同长轴的椭圆柱形分界面情况，其 α 与 β 值的大小关系，乃介于公式(15)和(19)限定值之间。

三、倾斜椭球体分界面上入射角不等于透射角的证明

以均匀稳定电流场中一个椭球体分界面情况为例，为简单起见，设 $b=\infty$，x 轴与正常或入射稳定电流场的电流密度 j_0 之夹角为 θ，如图 2 所示。

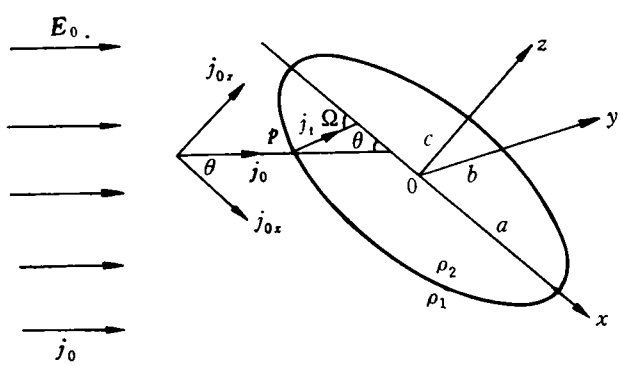

图 2 均匀电流场中一个倾斜椭球体示意图

不难理解，当在椭球分界面上任意一点 P 处，入射电流密度 j_0 与透射电流密度 j_t 两者矢量方向平行或在一条重合的直线上时，j_t 相对 j_0 的方向便未发生折射，这里必有 j_0

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

与 j_t 同 x 轴的夹角相等（$\theta = \Omega$）。否则当 $\Omega \neq \theta$ 时，必有 j_0 与 j_t 的矢量方向不相同，因此它们与 P 点分界面法线之夹角 α 和 γ 也不相等，即入射角不等于透射角（$\alpha \neq \gamma$）。现从 Laplace 已知解出发，严格证明在一般情况下 $\Omega \neq \theta$ 即 $\alpha \neq \gamma$。

将 j_0 分解为平行于 x 轴和平行于 z 轴的两个分量 j_{0x} 和 j_{0z}，由图 2 有

$$\left.\begin{aligned} j_{0z} &= j_0 \cos\theta, \\ j_{0x} &= j_0 \sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

在均匀电流场 j_{0z} 和 j_{0x} 的分别作用下，则由已知解可导出 P 点处分界面内部透射电流密度 j_t 沿 x 和 z 轴的两个分量有以下形式

$$\left.\begin{aligned} j_{zt} &= (1 + K_z \varphi_z) \frac{\rho_1}{\rho_2} j_{0z}, \\ j_{xt} &= (1 + K_x \varphi_x) \frac{\rho_1}{\rho_2} j_{0x}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

式中

$$K_z = \frac{\rho_2 - \rho_1}{4\pi\rho_2 - (\rho_2 - \rho_1)\varphi_z}, \quad \varphi_z = \frac{4\pi c}{a + c},$$

$$K_x = \frac{\rho_2 - \rho_1}{4\pi\rho_2 - (\rho_2 - \rho_1)\varphi_x}, \quad \varphi_x = \frac{4\pi a}{a + c},$$

于是

$$\left.\begin{aligned} K_z \varphi_z &= \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 a + \rho_1 c} c, \\ K_x \varphi_x &= \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 c + \rho_1 a} a, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

由图 2 可见，θ 和 Ω 的正切为

$$\tan\theta = \frac{j_{0x}}{j_{0z}}, \quad \tan\Omega = \frac{j_{xt}}{j_{zt}}, \tag{25}$$

将(22)和(24)式代入(23)式得

$$\tan\Omega = \frac{\rho_2 a + \rho_1 c}{\rho_2 c + \rho_1 a}, \quad \tan\theta = K_0 \tan\theta, \tag{26}$$

式中系数可称入射电流的折射参数

$$K_0 = \frac{\rho_2 a + \rho_1 c}{\rho_2 c + \rho_1 a}, \tag{27}$$

分析此式可得出重要结论：在 a、c 和 ρ_1、ρ_2 为一般值情况下，乃有 $K_0 \neq 1$ 或 $\Omega \neq \theta$，即 $\alpha \neq \gamma$ 的结果，因此入射角一般是不等于透射角的。

四、结　　论

稳定电流场的矢量成分在穿过电阻率不同的导电介质分界面时，其矢量方向按折射定律发生折射；当将稳定电流场分解为正常场与异常场或入射场与反射场时，利用正常电流密度定义入射角所得到的 $\alpha = \beta = \gamma$ 关系仅适用少数特殊界面情况，不具普遍性，即不

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

是对任何光滑连续的曲形分界面均成立. α、β、γ 三者的各种大小关系由分界面的具体形状决定. 分界面对稳定电流场的反射系数和透射系数，除与分界面两侧导电介质的电阻率值大小有关的电性成份外，还与分界面的具体几何形状密切相关，不能一概而论.

参 考 文 献

[1] 傅良魁编译，电法勘探文集，地质出版社，1958.
[2] 傅良魁、李金铭主编，电法勘探教程，地质出版社，1980.
[3] 傅良魁著，应用地球物理学电学原理，地质出版社，1989.
[4] 薛琴访编著，场论，地质出版社，1964.
[5] 施中良、张中雄编，宏观场论，中国地质大学出版社，1987.
[6] 沈 飘、何继善，仿用反射地震处理 MT 资料反演的理论探讨，物探与化探，15，366—373，1991.
[7] 王家映、Oldenburg D.、Levy S.，大地电磁测深的拟地震解释法，石油地球物理勘探，20，66—79，1985.
[8] 刘方文、马冠群，稳定电流场的入射、透射、衍射——波动性，地球物理学报，35，396—401，1992.

ON THE RELATIONSHIP OF INCIDENCE, REFLECTION AND TRANSMISSION IN STEADY CURRENT FIELD

FU PING
(*China University of Geosciences, Beijing* 100083)

Abstract

In this paper, the expression of incident field, reflective and transmissive fields is given on ellipsoid interface. The relationship of incident angle (α), reflective angle (β) and transmissive angle (γ) is also given on cylinder and spherical interface. In general, α, β and γ are not to equal each other and their relationship is decided by the shape of interface.

Key wrods Steady current field, Incidence, Reflection, Transmission, Refraction.

作者简介 傅 平，男，1955 年生，毕业于中国地质大学北京研究生院，获应用地球物理学硕士学位，现任中国地质大学讲师，主要研究电磁法应用、工程物探的方法理论及仪器研制，已发表«勘察地下管线的一种新方法——同点比值法»及«斜坡地形条件下地下管线勘察的定位方法»等多篇论文.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net