第40卷 第6期
1997年 11 月

地 球 物 理 学 报
ACTA GEOPHYSICA SINICA

Vol.40, No.6
Nov., 1997

极光区离子分布函数视线方向上的解析解及其饱和现象*

吴 健

(中国电波传播研究所，新乡 453003)

摘 要

以弛豫碰撞模式下 Boltzmann 方程的解为基础，从极光区视线方向上离子的非 Maxwell 一维速度分布函数的 Raman 等人的积分解出发，导出了一维速度分布函数的解析形式解，给出了它的一些特性，并研究了该分布函数随电场增强而出现的饱和现象，给出了物理解释，计算了几种情况下的饱和电场值.

关键词 极光区离子，离子速度分布函数，非 Maxwell 速度分布.

1 引 言

在高纬极光区电离层中，由于有很强的对流电场存在，离子相对于中性气体的 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移常常是超声速的. 这样的超声速漂移使极光区电离层离子在平行与垂直于磁场方向的 Joule 加热不同，导致离子的速度分布函数严重偏离平衡态下的 Maxwell 分布.

极光区非平衡条件下离子速度分布函数的理论研究工作，可追溯到 70 年代初 Cole 的工作[1]和 Schunk 与 Walker 的工作[2]，随后 St-Maurice和 Schunk 的一系列工作对弛豫碰撞模式下的极光区离子速度分布作了系统地研究[3—6]，并在 St-Maurice和 Schunk 的综述文章[7]中给予了系统的评述.

上述工作首先被 Raman 等人[8]应用于研究极光区电离层的非相干散射谱. 首先给出了探测方向上的离子速度分布函数，并发现，随着电场的增强，极光区电离层非相干散射谱从 Maxwell 分布下的双峰形状演变成非 Maxwell 分布下的单峰甚至三峰形状. Hubert[9]和 Suvanto[10]发展了 Raman 等人的工作，并把它应用于非相干散射谱的解释.

Raman 等人给出的探测方向上的离子速度分布函数是一个两重 Gauss 无穷积分形式，在应用于非相干散射谱的研究中，其数值计算的收敛性特别差，严重影响了它在实际非相干散射资料分析中的应用; Suvanto 对 Raman 等人的工作作了改进，把它写成一个无穷级数形式，其各项系数均是高阶导数，这样的形式仍不太理想.

与上述工作的方法不同，Winkler 等人[11]最近用 Monte Carlo 方法模拟计算离子的非

* 国家自然科学基金和国家教委留学回国人员工作资助的课题.

1997年3月10日收到修改稿.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Maxwell分布函数，他们发现，对于一定的离子与中性成分的碰撞模式，离子的速度分布函数在电场变强时趋于饱和．对此他们给出了定性物理解释，但无定量关系．

本文的目的是给出探测方向上离子速度分布函数的解析形式，以提高计算速度，并用它研究离子分布函数形状变化，以及不同碰撞模式下离子分布函数随电场增强的饱和趋势，并给这种饱和现象以清楚的物理解释．

2 视线方向上的分布函数

从弛豫碰撞模式下 Boltzmann 方程的解出发，Raman 等人[8]给出了视线方向上一维离子速度分布函数的积分形式：

$$g_i(p,\ D^*,\phi)=\frac{\exp(-D^{*2}-p^2)}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}r\mathrm{I}_0[2D^*\sqrt{r^2+(p\sin\phi-q\cos\phi)^2}]\ \mathrm{e}^{(-r^2-q^2)},\quad(1)$$

其中 g_i为归一化的视线方向上的离子速度分布函数；p 为视线方向上离子的归一化速度，D^*为与电场有关的非 Maxwell 分布参数，ϕ为视线方向与磁力线之间的夹角；q 和 r 都为与视线方向垂直的离子归一化速度分量，这里的归一化速度 p,q 和 r 分别为三个方向上的离子速度与沿磁场方向离子热速度的比值；I_0为修正的零阶虚宗量贝塞尔函数．

利用虚宗量贝塞尔函数的加法定理和定积分公式(见附录)可以得到(1)式的解析形式：

$$g_i(p,D^*,\phi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{D^{*2}\sin^2\phi}{2}-p^2\right)\left[\mathrm{I}_0\left(\frac{1}{2}D^{*2}\sin^2\phi\right)\mathrm{I}_0\left(2D^*\sin\phi p\right)\right.$$

$$\left.+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_n\left(\frac{1}{2}D^{*2}\sin^2\phi\right)\mathrm{I}_{2n}(2D^*\sin\phi p)\right].\quad(2)$$

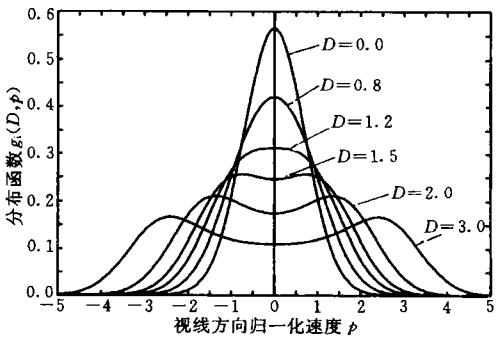

图1 参数D取不同值，由(2)式计算的离子速度分布函数$g_i(p,D)$随p的变化

(2)式是一个关于贝塞尔函数的级数，其中 I_n 和 I_{2n}分别为 n 阶和 $2n$ 阶贝塞尔函数，而贝塞尔函数是不难计算的．

首先，通过(2)式我们不难证明有下式成立：

$$g_i(p,\ D^*,\ \phi)=g_i(p,\ D),\quad(3)$$

其中 $D=D^*\sin\phi$，因此，研究任意探测方向ϕ上的速度分布函数随 D^*的变化，只需要研究 $\phi=\pi/2$ 的情况，然后把 D^*用 $D^*\sin\phi$替代即得任意ϕ角时的速度分布．

(1)式的前提是假定电场只存在于垂直于磁场的方向上，因此非 Maxwell 速度分布只发生在垂直于磁场的方向上，由文献[8]可知探测方向的温度是 $D^*\sin\phi$的函数，而探测方向的分布函数除依赖于该方向上的速度之

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

外，还是该方向上温度的函数，因此不难理解(3)式中 D^* 和 ϕ 两个参数以一个独立变量 $D^*\sin\phi$ 的形式出现．

图 1 给出 $g_i(p,D)$ 随 D 和 p 的变化，当 D 从小增大时，$g_i(p,D)$ 分布从 $D=0$ 时的 Maxwell 速度分布函数渐变成双峰分布，分布的最大值从 D 较小时的单个点逐渐变成 D 较大时的两个对称点．图 1 所示的分布函数特征前人也曾由(1)式计算出[8,10]，只是以前的工作未认识到(3)式所示的关系，计算结果都是针对给定的 D^* 和 ϕ 两个参数的．

3　分布的峰值点

根据(2)和(3)式，分布函数 $g_i(p,D)$ 对 p 的偏导数可写成

$$\frac{\partial g_i(p,D)}{\partial p} = -2pg_i(p,D) + \frac{2D}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{D_2}{2}-p^2\right)\left\{I_0\left(\frac{D^2}{2}\right)I_1(2Dp) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n\left(\frac{D^2}{2}\right)[I_{2n-1}(2Dp)+I_{2n+1}(2Dp)]\right\}, \tag{4}$$

当 D 较小时，(4)式右端第 1 项的影响为主，$\partial g_i/\partial p$ 只有一个零值点 $p=0$，即 $g_i(p,D)$ 的最大分布值，当 D 较大时，(4)式右端第 2 项贡献为主，因此除了 $p=0$ 的零点之外，$\partial g_i/\partial p$ 还有两个对称的零点，后者为峰值点．显然存在一个 D 值 $D=D_c$，当 $D\leqslant D_c$ 时，分布 $g_i(p,D)$ 为单峰；当 $D>D_c$ 时，$g_i(p,D)$ 为双峰．D_c 满足如下方程：

$$\left.\frac{\partial^2 g_i(p,D_c)}{\partial p^2}\right|_{p=0} = 0 \tag{5}$$

或

$$(1-D_c^2)\,I_0\left(\frac{D_c^2}{2}\right) + D_c^2 I_1\left(\frac{D_c^2}{2}\right) = 0, \tag{6}$$

上式的解为

$$D_c = 1.257. \tag{7}$$

$g_i(p,D)$ 的峰值点 p_m 上(4)式右边等于零，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n I_n\left(\frac{D^2}{2}\right)\left[\frac{D}{2}I_{2n-1}(2Dp_m) + \frac{D}{2}I_{2n+1}(2Dp_m) - p_m I_{2n}(2Dp_m)\right] = 0. \tag{8}$$

图 2 给出方程(8)的解．首先，$p_m=0$ 是方程(8)的一个解，当 $D\leqslant D_c$ 时，$g_i(p,D)$ 在 $p=0$ 点两阶导数小于零，因此，这时 $p=0$ 是分布的峰值点；当 $D>D_c$ 时，$g_i(p,D)$ 在 $p=0$ 点两阶导数大于零，因此，这时 $p=0$ 是分布的谷值点，其峰值点为 $p=\pm p_m$ 两

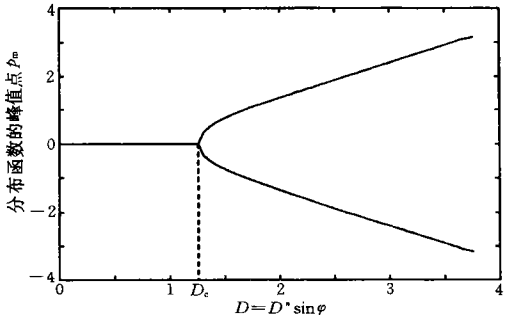

图2　由(2)式计算的离子速度分布函数 $g_i(p,D)$ 的峰值位置 p_m 随参数 D 的变化

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

对称点．了解这些参数的变化规律对非相干散射谱的分析具有重要意义．

图 1 和图 2 所示的分布函数特征从物理上可以这样理解，首先由于(3)式只考察垂直于磁场方向的情况，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移通过 Joule 加热过程使离子在速度空间从速度为零的原点向速度高的两端迁移，随 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移的增强，速度小的离子越来越少，速度大的离子越来越多．下面的讨论表明，D^* 随 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移的增强而增大，当 D^* 或 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 增大到一定程度时就会出现图 1 和图 2 所示的双峰形状的分布函数．

4 强电场作用下速度分布函数的饱和

为了研究强电场对极光区离子速度分布函数的影响，首先要建立分布参数与电场的联系．在准静态条件下的均匀电离层中，有如下关系[6,12]：

$$T_{/\!/} = T_{\mathrm{n}}(1+\beta_{/\!/}D'^{2}), \tag{9}$$

$$T_{\perp} = T_{\mathrm{n}}(1+\beta_{\perp}D'^{2}), \tag{10}$$

$$\beta_{/\!/} + 2\beta_{\perp} = 2. \tag{11}$$

其中 $T_{/\!/}$ 和 $T_{\perp}$ 分别为离子平行于磁场和垂直于磁场的温度；T_{n} 为中性成分温度，D' 为归一化电场：

$$D' = \frac{E}{B\sqrt{2k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{n}}/m_{\mathrm{n}}}}\ . \tag{12}$$

其中 E 为电场，B 为磁场，k_{B} 为 Boltzmann 常数，m_{n} 为中性成分的质量．参数 $\beta_{/\!/}$ 和 $\beta_{\perp}$ 与碰撞过程有关，对于文献 [6] 的纯极化碰撞模式(即粒子间的作用势与距离的四次方成反比)，$\beta_{/\!/}$ 和 $\beta_{\perp}$ 与电场无关．

另外，对于(1)式所示的离子速度分布，我们有[8]：

$$T_{/\!/} = T^*, \tag{13}$$

$$T_{\perp} = T^*(1+D^{*2}). \tag{14}$$

因此，我们可以根据(9)至(14)式建立分布参数 D^* 与归一化电场 D' 的关系：

$$D^{*2} = \frac{(\beta_{\perp}-\beta_{/\!/})D'^{2}}{1+\beta_{/\!/}D'^{2}}\ . \tag{15}$$

为了说明离子速度分布的饱和趋势，我们考察 $p=0$ 处分布函数 $g_{\mathrm{i}}(p,D)$ 极值随电场的变化．图 3a 给出一个计算的例子，当电场增大时，分布函数 $g_{\mathrm{i}}(p,D)$ 趋于稳定值．

从(15)式很容易理解这种饱和趋势．当 $\beta_{/\!/}D'^{2} >> 1$ 时，D^{*2} 趋于饱和值(见图 3b)：

$$D^{*2} = \left(\frac{1}{\beta_{/\!/}} - \frac{3}{2}\right). \tag{16}$$

随着电场增大，D^* 趋于饱和，离子速度分布自然趋于饱和，也即当电场足够强时，$T_{/\!/}$ 和 $T_{\perp}$ 主要取决于 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 产生的 Joule 加热，而与中性温度无关(参见(9)和(10)式)，从而使 $T_{\perp}/T_{/\!/}$ 与电场无关，因此分布趋于饱和．

定义归一化饱和电场 D_{s}' 满足下式：

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\beta_{//} D_s'^{\,2} = e, \tag{17}$$

$$E_s = B\sqrt{\frac{2k_B T_n e}{\beta_{//} m_n}}\ , \tag{18}$$

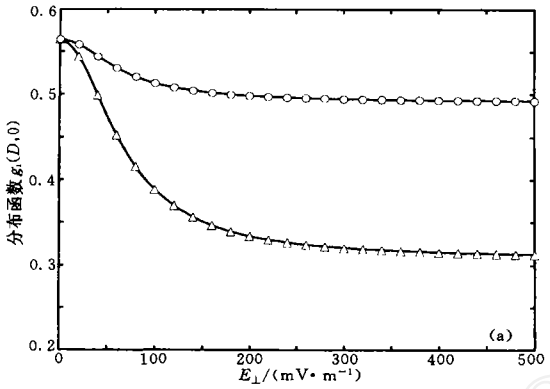

图 3a　p=0 时离子速度分布函数 $g_i(p,D)$ 随电场 E 的增大饱和

(计算中 T_n=1000K, ϕ=90°. 图中上曲线对应 O^+-O共振电荷交换碰撞模式, $\beta_{//}$ = 0.3364; 下曲线对应 O^+-N_2纯 4-12碰撞模式, $\beta_{//}$=0.56 参数选取参考文献 [6]和 [11].)

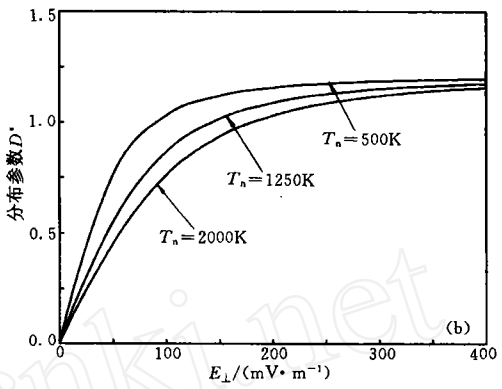

图 3b　非 Maxwell 分布参数 D^* 随电场增大饱和

(计算中假定离子是 O^+, 中性成分O, 碰撞为 O^+-O 共振电荷交换碰撞模式, 不同曲线对应不同的中性温度, 当中性温度增大时, 分布趋于饱和的速度变慢.)

其中 e 为自然对数之底数, e = 2.71828183. 对于图 3b 中的参数, 我们可以计算出饱和电场 E_s = 145mV / m.

若假定电场为零时, 离子速度分布为 Maxwell 分布, 有 $T_\perp/T_{//}=1$; 而有电场时的非 Maxwell 分布下, 有 $T_\perp/T_{//} > 1$, 所以由 (11)和 (15)式一般有

$$\beta_{//} \le 2/3,\quad \beta_\perp \ge 2/3. \tag{19}$$

这就是说, $\beta_{//}$有一个物理上限, $\beta_\perp$有一个物理下限. 因此有

$$D_s' \ge \sqrt{3e/2}, \tag{20}$$

$$E_s \ge 260.4B\sqrt{T_n / M_n}. \tag{21}$$

其中 M_n为中性的原子量数, 磁场 B、中性温度 T_n和 E_s均采用 m.k.s 制. (20)和 (21)式表明, 饱和电场有一个物理下限.

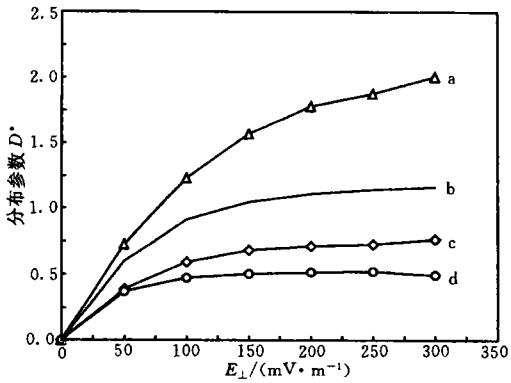

图 4　非 Maxwell 分布参数 D^*随电场增大的饱和

计算中 T_n=1000K. a. O^+与 O 的碰撞为混合碰撞模式, $\beta_{//}$值见文献 [11]; b. O^+与 O 的碰撞为共振电荷交换碰撞模式, $\beta_{//}$ = 0.3364, 见文献 [6]; c. NO^+与 O 的碰撞为纯 4-12碰撞模式, $\beta_{//}$值见文献 [11]; d. O^+与 N_2的碰撞 为纯4-12碰撞模式, $\beta_{//}$值见文献 [11].

以上讨论是在假定$\beta_{//}$与电场或 D' 无关的情况下进行的, 而实际上的许多碰撞模式下$\beta_{//}$与电场有关. 图 4 给出几种碰撞模式下 D^*随电场增大的饱和, 计算中

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\beta_{//}$随电场的变化是文献[11]利用 Monte Carlo 方法计算出来的．实际上，许多碰撞模式下，$\beta_{//}$是电场的慢变函数，因此，上述讨论仍然成立．

表 1 中我们给出根据(18)式计算的对应图 4 的 4 种碰撞模式的饱和电场值．其中的

表1 几种碰撞模式下的饱和电场(mV/m)

	T_n=1000K	T_n=1500K	T_n=2000K
O^+－O混合碰撞	204	250	288
O^+－O共振电荷交换碰撞	145	178	205
NO^+－O纯4-12碰撞	121	149	172
O^+－N_2纯4-12碰撞	85	104	120

几种碰撞模式对应不同的粒子间碰撞作用势，文献[11]有详细介绍．

5 小 结

本文给出了视线方向上离子速度分布函数的解析形式．相对于积分形式的分布函数，它大大提高了数值计算的收敛速度．同时，证明视线方向上的分布函数对分布参数 D^* 和方位角ϕ的函数关系不是独立的，实际上它仅依赖于独立变量 $D=D^*\sin\phi$.

利用解析形式的离子速度分布函数，很容易计算出分布的峰值位置．计算表明，峰值点的位置依赖于参数 D，且存在一个临界值 $D=D_c$，当 $D\geqslant D_c$时，分布函数在速度空间有两个非零的对称峰值点 $\pm p_m$；当 $D<D_c$时，分布只有一个峰值点 $p_m=0$，其中 $D_c=1.257$.

通过计算表明，当电场增强时，离子速度分布函数 $g_i(p,D)$之极小值趋于稳定值，本文从数学上和物理上对这种饱和现象进行解释，并计算了几种情况下的饱和电场．

附录 公式(2)的推导

利用贝塞尔函数 I_0的加法公式：

$$I_0(\beta\sqrt{x^2+y^2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(\beta x)I_{2n}(\beta y), \tag{A1}$$

代入(1)式得

$$g_i(p,D^*,\phi) = \frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{D^{*2}}{2}-p^2\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n I_n\left(\frac{D^{*2}}{2}\right)\times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq I_{2n}[2D^*(p\sin\phi - q\cos\phi)]e^{-q^2}, \tag{A2}$$

其中用了积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-r^2} I_{2n}(2D^*r) = \sqrt{\pi}\exp\left(\frac{D^{*2}}{2}\right)I_n\left(\frac{D^{*2}}{2}\right). \tag{A3}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

再利用贝塞尔函数 I_{2n} 的加法公式：

$$I_{2n}[\beta(x-y)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k I_k(\beta x) I_{2n+k}(\beta y), \tag{A4}$$

(A2)式右边的积分可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-q^2} I_{2n}[2D^*(p\ \sin\phi - q\ \cos\phi)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k I_k(2D^* p \sin\phi) \int_{-\infty}^{\infty} dq I_{2n+k}(2D^* q\ \cos\phi) e^{-q^2}. \tag{A5}$$

显然，$k = 2m+1$ 时，(A5)式右边的被积函数为奇函数，其对称区间积分为零，而当 $k = 2m$ 时，(A5)式可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-q^2} I_{2n}[2D^*(p \sin\phi - q\ \cos\phi)]$$

$$= \sqrt{\pi}\ \exp\left(\frac{1}{2} D^{*2} \cos^2\phi\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{2m}(2D^* p \sin\phi) I_{m+n}\left(\frac{1}{2} D^{*2} \cos^2\phi\right), \tag{A6}$$

其中又利用了一次积分公式(A3)．把(A6)式代入(A2)式，并利用下式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n I_n\left(\frac{D^{*2}}{2}\right) I_{m+n}\left(\frac{D^{*2}\cos^2\phi}{2}\right) = (-1)^m I_m\left(\frac{D^{*2}\sin^2\phi}{2}\right) \tag{A7}$$

即得(2)式．

参　考　文　献

[1] Cole, K. D., Atmospheric excitation and ionization by ions in strong auroral and man-made electric fields, *J. Atmos. Terr. Phys.*, **33**, 1241—1249,1971.

[2] Schunk, R. W., Walker J. C. G., Ion velocity distributions in the auroral ionosphere, *Planet. Space Sci.*, **20**, 2175—2191, 1972.

[3] St-Maurice, J. – P., Schunk R. W., Auroral ion velocity distributions using a relaxation model, *Planet. Space Sci.*, **21**, 1115—1130, 1973.

[4] St-Maurice, J. – P., Schunk R. W., Behaviour of ion velocity distributions for a simple collision model, *Planet. Space Sci.*, **22**, 1—18,1974.

[5] St-Maurice, J. – P., Schunk R. W., Use of generalized orthogonal polynormial solution of Boltzmann's equation in certain aeronomy problems: Auroral ion velocity distributions, *J. Geophys. Res.*, **81**, 2145—2154, 1976.

[6] St-Maurice, J. – P., Schunk R. W., Auroral ion velocity distributions for a polarization collision model, *Planet. Space Sci.*, **25**, 243—2260, 1977.

[7] St-Maurice, J. – P., Schunk R. W., Ion velocity distributions in the hight-latitude ionosphere, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **17**, 134, 1979.

[8] Raman, R. S.V., St-Maurice J. – P., Ong R. S. B., Incoherent scattering of radar waves in the auroral ionosphere, *J. Geophys. Res.*, **86**, 4751—4762, 1981.

[9] Hubert, D., Non-Maxwellian velocity distribution functions and incoherent scattering of radar waves in the auroral ionosphere, *J. Atmos. Terr. Phys.*, **46**, 601—611, 1984.

[10] Suvanto, K. K., Non-Maxwellian ion velocity distribution in the ionospheric F-region, *Thesis of the*

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

University of London, 1989.

[11] Winkler, E., St-Maurice J. – P., Barakat A. R., Results from improved Monte Carlo calculations of auroral ion velocity distributions, *J. Geophys. Res.*, **97**, 8399—8423, 1992.

[12] St-Maurice, J. – P., Hanson W. B., Ion frictional heating at high latitudes and its possible use for an in-situ determination of thermospheric winds and temperatures, *J. Geophys. Res.*, **87**, 7580—7602, 1982.

AN ANALYTICAL FORM OF THE RAMAN ET AL. ION VELOCITY DISTRIBUTION IN AURORAL IONOSPHERIC F-REGION AND THE DISTRIBUTION SATURATION WITH INCREASE OF ELECTRIC FIELD

WU JIAN

(*China Research Institute of Radiowave Propagation, P. O. Box* 138, *Xinxiang* 453003, *China*)

Abstract

An analytical form of the 1-D Raman et al. ion velocity distribution is obtained in this paper, which describes the non-Maxwellian distributions driven by large electric field in the high-latitude ionosphere on a line-of-sight respect to the geomagnetic field. Some propertives of the distribution are found: a) it depends on non-Maxwellian parameter D^* and on the aspect angle ϕ between the line-of-sight and the geomagnetic field through a combinated parameter $D = D^* \sin\phi$. b) there is a value of the parameter D, say D_c, for which the distribution has one hump when $D < D_c$, and two humps initiately when $D > D_c$, where $D_c = 1.257$. The distribution saturation with the increase of the electric field is studied using the analytical formulation. It is found that the distribution saturation with increasing electric field is caused by the saturation of the non-Maxwellian parameter D^*. When the electric field is enough strong so that the parallel and perpendicular temperatures of ions to the magnetic field are approximately proportional to the square of the electric field. This implys that the ratio of the parallel temperature to the perpendicular, or the non-Maxwellian parameter D^*, tends to be saturated when the electric field become enough strong. Values of the saturating electric field are calculated for several collision models.

Key words Auroral ions, ion velocity distribution, Non-Maxwellian velocity distribution.

作者简介 吴健，男，1962年生．1990年于巴黎第六大学获博士学位，现任中国电波传播研究所副总工程师、研究室主任、研究员．研究领域包括电离层电波传播，电离层探测技术，以及物理过程的计算机模拟和建模．国内外学术刊物上发表论文数十篇．

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net