

# 基于连续小波变换的大地电磁 信号谱估计方法

徐义贤 王家映

(中国地质大学地球物理系, 武汉 430074)

[摘要] 在基于连续小波变换的大地电磁信号谱估计方法中,通过引入整体平均、小波系数收缩和显著性检验等统计技术,以提高谱估计的精度.文中同时讨论了连续小波变换中各种参数的选取问题,给出了 Morlet 小波函数中尺度与傅里叶频率之间转换的经验公式,并给出了谱估计的具体算法.结果表明,本文方法可有效压制较强的白噪声和局部相关噪声.与 FFT 谱估计方法相比,该方法大大降低了对信号记录长度的要求,因而对大地电磁信号的处理有实际意义.

[关键词] 大地电磁信号,谱估计,连续小波变换,小波系数收缩,显著性检验.

## 1 引言

用傅里叶变换估计信号的频谱具有自然的特性,因为信号的时间域和频率域特性通过傅里叶变换直接联系在一起<sup>[1]</sup>,同时,用傅里叶变换估计信号的谱也存在一些难以克服的缺点<sup>[1,2]</sup>,如信号中的噪声难以在谱中剔除掉,要求数据的长度达到待提取最大周期的 6 倍以上等.近年来,小波变换在地球物理资料处理和反演中得到广泛关注<sup>[3-5]</sup>.在统计学和信号分析领域,国内外学者提出了多种基于小波变换的谱估计方法,如基于连续小波变换 CWT 的整体平均方法<sup>[6-8]</sup>和基于离散小波变换 DWT 后对小波系数进行置阈值的收缩方法<sup>[9-13]</sup>等.已有成果表明,采用小波变换进行谱估计可显著改善傅里叶变换的上述缺点.在大地电磁信号处理中采用小波变换进行谱估计有重要的实际意义,一是因为实测大地电磁信号都是含噪信号且噪声的类型多样;二是其信号采集的成本大,为了达到较高的分析精度而进行长时间观测或重复观测是不可取的.

鉴于利用连续小波变换进行谱估计能以很小的频率步长采样,而比离散小波变换具有更高频率分辨率的特点,徐义贤<sup>[14,15]</sup>曾研究了基于连续小波变换的谱估计方法及小波功率谱受记录长度、噪声水平等的影响问题.本文则着重探讨在基于连续小波变换的谱估计中引入整体平均、小波系数收缩和置信水平检验等统计方法对提高谱估计精度的作用,并给出数值试验的结果.文中同时讨论了连续小波变换中各种参数的选取和小波尺

[收稿日期] 1999- 09- 04 收到,2000- 01- 19 收到修定稿.

[基金项目] 国家自然科学基金项目(49674227).

[作者简介] 徐义贤,男,1965 年生,1996 年在中国地质大学获博士学位,现为中国地质大学地球物理系副教授.

度与傅里叶频率的转换等问题.

## 2 连续小波变换的算法和谱估计

假定有一个等间隔采样的离散时间序列  $x_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , 采样间隔为  $\delta t$ , 其连续小波变换为如下的褶积形式

$$X_n(s) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \phi^* \left[ \frac{(k-n)\delta t}{s} \right], \quad (1)$$

式中  $\phi(\cdot)$  为小波函数, 上角标\* 表示复数共轭,  $n$  为时间轴上的位置变量,  $s$  为小波尺度变量. 根据褶积理论, (1) 式可以在频率域计算

$$X_n(s) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \phi^*(s\omega_k) e^{i\omega_k n \delta t}, \quad (2)$$

式中  $x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i k n / N}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,

$$\phi(s\omega_k) = \left( \frac{2\pi s}{\delta t} \right)^{1/2} \phi_0(s\omega_k), \quad \text{且有} \sum_{k=0}^{N-1} |\phi(s\omega_k)|^2 = N.$$

上面小波函数的下角标 0 表示母小波, 在本文的算例中采用 Morlet 母小波, 其时间域和频率域形式分别为

$$\phi_0(t) = \pi^{-1/4} e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2},$$

$$\phi_0(s\omega) = \pi^{-1/4} e^{-(s\omega - \omega_0)^2/2}, \quad \omega > 0.$$

小波函数取定之后, 要选择一套离散化的尺度变量才能用(2)式计算小波变换. 一般地, 可按如下原则选取尺度参数

$$s_j = s_0 2^{j\zeta}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J, \quad J = \zeta^{-1} \log_2(N \delta t / s_0),$$

式中  $s_0$  为最小的尺度, 对于 Morlet 小波,  $s_0$  取为采样间隔的 2 倍, 即使它与信号中所包含的最高频率分量的周期一致; 而  $\zeta$  是愈小愈好(对频率的分辨率愈高), 但其取得过小则耗费的计算时间太大, 因此在实际计算时  $\zeta$  的大小取决于可容忍的计算时间, 但对于 Morlet 小波, 最大的  $\zeta$  不超过 0.5.

由于 Morlet 小波为复值, 所以一个实时间序列  $x_n$  经连续小波变换后, 可得到实部  $\text{Re}[X_n(s)]$  和虚部  $\text{Im}[X_n(s)]$  两部分, 根据实、虚部可以计算其振幅和相位, 并把其振幅的平方定义为小波功率谱. 为了将以尺度为变量的小波谱转换为具有物理含义的频谱, 必须找到给定的小波函数中尺度与频率的对应关系. 根据 Meyers 等<sup>[16]</sup> 提出的方法, 可以计算 Morlet 小波函数当  $\omega_0 = 6$  时, 傅里叶频率与尺度之间的关系为:  $f = 1/1.03s$ , 这证明徐义贤<sup>[14, 15]</sup> 曾按  $f = 1/s$  进行 Morlet 小波函数尺度与傅里叶频率之间的转换是近似成立的.

## 3 提高谱估计精度的统计处理方法

当信号中含有噪声时, 谱估计中可采用多种方法进行去噪, 我们对沿时间轴的平均、

小波系数收缩及显著性检验等方法用于后面的谱估计数值试验中。

### 3.1 平均方法

在目前基于连续小波变换的谱估计中,最常见的是在时频平面上沿时间轴对每个分析频率分别进行整体平均<sup>[7]</sup>,实践证明,这是最有效的去除随机噪声的技术。小波功率谱在某一选定时间段的平均定义为

$$\overline{X}_n^2(s) = \frac{1}{N_a} \sum_{i=n_1}^{n_2} |X_i(s)|^2, \quad (3)$$

式中  $n$  为  $n_1 n_2$  的中点,  $N_a = n_2 - n_1 + 1$  为平均的段长度。当对整个记录段进行整体平均时,由上式计算得到的平均小波谱称为整体小波谱。理论上已证明<sup>[15,17]</sup>,信号的整体小波谱为其傅里叶谱经小波函数加权平均的结果,因此整体小波谱与傅里叶谱估计中加斜坡等光滑或平均方法得到的结果是可比较的,大量的数值试验也证明了这一点<sup>[13-15]</sup>。

### 3.2 置阈值小波系数收缩方法

这种方法最初是在利用离散小波变换进行谱估计时提出的<sup>[9]</sup>,它对不同的噪声都有一定的压制作用,尤其适合于压制高斯型噪声。这种方法目前在统计学领域发展很快,且取得了引人注目的成果<sup>[9]</sup>。其标准实施步骤如下:

- (1) 用 FFT 计算时间序列的周期图;
- (2) 对周期图进行离散小波变换;
- (3) 对小波系数进行置阈值收缩,置阈值的方式主要有如下两种(小波系数用  $x$  表示,经收缩后的输出用  $y$  表示):

$$\begin{aligned} \text{硬收缩: } y_h &= \begin{cases} x, & |x| > \lambda \\ 0, & |x| \leq \lambda \end{cases} \\ \text{软收缩: } y_s &= \begin{cases} \text{sign}(x)(|x| - \lambda), & |x| > \lambda \\ 0, & |x| \leq \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

确定上面两式中阈值  $\lambda$  的方法有多种,取决于所用的统计模型。Donoho 和 Johnstone<sup>[9]</sup>提出一种通用型  $\lambda_n$  值

$$\lambda_n = \sigma \sqrt{2 \log n}, \quad (4)$$

式中  $\sigma$  为估计的小波系数序列的标准差,  $n$  为数据的个数。

- (4) 对经收缩后的小波系数进行离散逆小波变换,得到经去噪后的傅里叶域周期图。

分析上述过程不难发现,这种方法有一个潜在的假设:信号中噪声的傅里叶谱对应的小波系数与有用信号的傅里叶谱对应的小波系数相比总是较小的。

### 3.3 谱的显著性检验

许多地球物理信号可以用 Markov 过程来模拟,即可用如下红色噪声模型来表示

$$x_n = \alpha x_{n-1} + z_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N; \quad x_0 = 0, \quad (5)$$

式中  $\alpha$  为假定的时滞量为 1 的自相关,  $z_n$  为白噪声序列。上式的归一化傅里叶功率谱为

$$P_k = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi k/N)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2, \quad (6)$$

只要选择合适的  $\alpha$  值,就可以用上式模拟任意的红色噪声谱。当  $\alpha = 0$  时, (6) 式对应于白

噪声的谱.

5% 的显著性等效于 95% 的置信水平. 对于实际的地球物理信号, 对其小波功率谱进行 5% 的显著性检验, 即是假定只有达到 95% 置信水平的小波功率谱才是信号的真谱. 根据时间序列分析的理论可知, 如果信号为正态分布的随机变量, 那么其经傅里叶变换后的实部和虚部也分别服从正态分布, 可将此结论推广到小波变换: 正态分布的随机信号经小波变换后的实、虚部亦服从正态分布. 由于正态分布变量的平方是一个自由度的  $x^2$  分布, 则小波功率谱为两个自由度的  $x^2$  分布, 记为  $x^2_2$ . 在后面的数值试验中, 进行显著性检验的是经过整体平均的小波功率谱, 因此需要重新确定数据的自由度, 即确定独立数据的个数. 显然尺度增大, 小波函数在时间轴上展宽, 每个频点的谱对应的相关时间段的长度变长, 从而使自由度变小. 在每个尺度上确定自由度  $\nu$  的公式为

$$\nu = 2 \sqrt{1 + \left( \frac{N_a \Delta t}{\gamma_s} \right)^2},$$

式中  $N_a$  为参与平均的离散信号的个数,  $\Delta t$  为采样间隔,  $s$  为尺度变量,  $\gamma$  为与小波函数的影响锥 (cone of influence) 有关的去相关因子. 通过数值试验, 可经验地找到 Morlet 小波当  $\omega_0 = 6$  时的去相关因子为 2.32. 这样, 为确定由 (5) 式表达的信号的小波功率谱的 95% 置信水平, 只需将 (6) 式计算的背景谱乘以  $x^2_\nu$  分布的第 95 个百分位值即可.

## 4 数值试验及结果分析

大地电磁信号记录的频带一般超过 5 个量级, 如我国引进较多的加拿大凤凰公司  $V_5$  系统, 其记录的频率范围为 320—0.00046 Hz, 信号处理时一般将其分为高频段和低频段分别进行谱分析. 为了检验前述方法用于大地电磁信号谱分析的有效性, 设计了 7 个振幅为 1 的谐波合成的信号, 其频带宽度约为 3 个数量级, 7 个谐波的频率分别为 10, 5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125, 0.15625, 此频率序列与  $V_5$  系统的分析频点是对应的, 采样速率为 20 点/s, 分析长度为 12.8 s, 小波函数为 Morlet 小波. 计算功率谱的步骤为:

1. 用 (2) 式计算离散信号的小波变换;
2. 用 (4) 式确定的阈值对小波系数进行软收缩;
3. 计算以尺度为变量的功率谱, 并用 (3) 式计算整个长度的整体小波功率谱;
4. 用  $f = 1/1.03s$ , 将以尺度为变量的功率谱转换成以傅里叶频率为变量的功率谱;
5. 计算 5% 的显著性水平.

由图 1 可见, 不论是否经过小波系数收缩步骤, 谱的 7 个峰值均对应 7 个谐波的频率, 但是未经小波系数收缩的谱有两个有用峰值没有超过 95% 的置信水平, 而经小波系数收缩后的有用信号谱峰值均超过 95% 的置信水平, 同时可观察到其谱的强度约增加 10 dB 以上. 图 2 为在 128—148 采样点之间加了幅值为 1 的按指数衰减的余弦波 (频率为 4 Hz) 噪声之后估计的功率谱, 其特点与图 1 完全相同. 我们还做了加嗽声噪声、矩形噪声等数值试验, 其结果也基本一致, 但当噪声的能量大于谐波信号能量的 2 倍以上时, 不论是否进行过小波系数收缩, 估计的谱均发生不同程度的偏离.

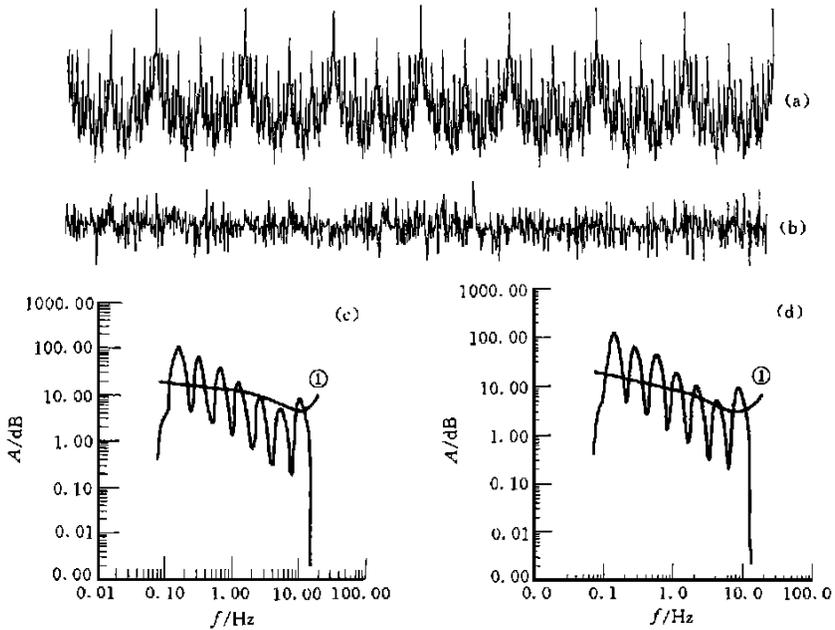


图 1 加 100% 白噪声的功率谱

(a) 合成的含白噪声的信号; (b) (a) 中所加白噪声; (c) 未经小波系数收缩的功率谱;  
(d) 经小波系数收缩的功率谱. ⊙ 95% 置信水平.

Fig. 1 Power spectrum of simulated signal added 100% white noise

## 5 结 论

5.1 上述数值试验的结果表明, 整体平均是基于连续小波变换的谱估计方法中压制随机噪声和局部相关噪声的有效技术.

5.2 小波系数收缩技术可提高有用信号谱的置信水平, 使有用信号的谱远高于估计噪声谱的背景值.

5.3 本文数值试验中信号的长度为最低频率谐波周期的 2 倍, 但数值试验结果表明, 信号长度等于最低频率谐波周期时即可获得与本文结果相当的谱估计精度, 这说明用本文提出的谱估计方法比基于 FFT 的谱估计方法对信号记录长度的要求大为降低, 这种性质对大地电磁法具有重要的实际意义.

加州大学 Berkeley 分校的 D. R. Brillinger 教授提供了有价值的背景资料. 计算中利用了 Colorado 大学大气和海洋项目组提供的免费 Fortran 子程序, 在此一并表示感谢.

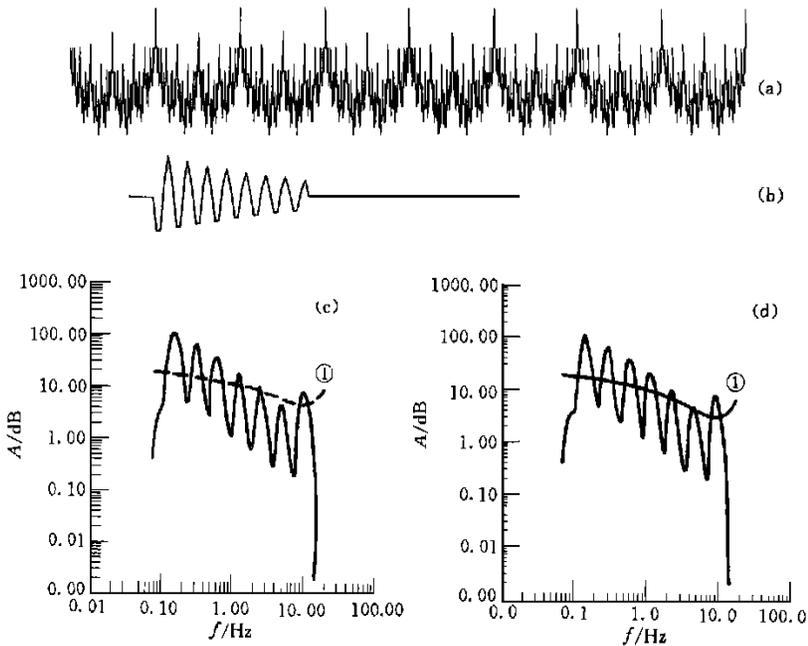


图2 在128—148点之间加了幅值为1的按指数衰减的余弦波频率为4Hz  
噪声的功率谱

(a) 合成的含白噪声信号; (b) 所加噪声; (c) 未经小波系数收缩的谱; (d) 经小波系数收缩的谱;  
① 95%置信水平。

Fig. 2 Power spectrum of simulated signal which contains a 4Hz cosine wave modulated by exponential function between 128 to 148 points.

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 巴特著. 地球物理学中的谱分析. 北京: 地震出版社, 1978.  
Bath M. Spectral Analysis in Geophysics (in Chinese). Beijing: Seismological Press, 1978.
- [ 2 ] 刘国栋, 陈乐寿主编. 大地电磁测深研究. 北京: 地震出版社, 1984.  
LIU Guo Dong, CHEN Le Shou et al. Research of Magnetotelluric Sounding. Beijing: Seismological Press, 1984.
- [ 3 ] 朱光明等. 小波变换及其在一维滤波中的作用. 石油物探, 1993, 32: (1): 1—10.  
ZHU Guang Ming et al. Wavelet transform and its application to 1-D filtering. *Geophysical Prospecting for Petroleum*. 1993, 32(1): 1—10.
- [ 4 ] 高静怀等. 地震资料处理中小波函数的选取研究. 地球物理学报, 1996, 39(3): 392—400.  
GAO Jing Huai. On the choice of wavelet functions for seismic data processing. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese) 1996, 39(3): 392—400.
- [ 5 ] 徐义贤, 王家映. 大地电磁的多尺度反演. 地球物理学报, 1998, 41(5): 704—711.  
XU Yi Xian WANG Jia Ying. A multiresolution inversion of one dimensional magnetotelluric data. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1998, 41(5): 704—711.
- [ 6 ] Farge M. Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1992, 24: 395—

- [ 7 ] Torrence C and Compo G P. A practical guide to wavelet analysis. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 1998, **79**(1): 61—78.
- [ 8 ] Weng H, K M Lau. Wavelets, period doubling, and time frequency localization with application to organization of convection over the tropical western Pacific. *J. Atmos. Sci.*, 1994, **51**: 2523—2541.
- [ 9 ] Donoho D L, I M Johnstone, G Kerkycharian, et al. Wavelet shrinkage: asymptopia? *J. Roy. Statist. Soc.*, 1995, **B57**: 301—369.
- [ 10 ] Brillinger D R. Some river wavelets. *Environmetrics*, 1994, **5**: 211—220.
- [ 11 ] Antoniadis A. Smoothing noisy data with coiflets. *Statistica Sinica*. 1994, **4**(2): 651—678.
- [ 12 ] M oulin P. Wavelet thresholding techniques for power spectrum estimation. *IEEE Trans. Signal Processing*. 1994, **42**: 3126—3136.
- [ 13 ] Hudgins L, Friehe C A, Mayer M E. Wavelet transforms and atmospheric turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **27**: 3279—3282.
- [ 14 ] 徐义贤,王家映. 有限长谐波信号的小波谱. 中国学术期刊文摘, 1999, **5**(2): 192—193.  
XU Yi Xian, WANG Jia Ying. Wavelet spectra of the signals with finite length. *Academic Periodical Abstracts of China*, 1999, **5**(2): 192—193.
- [ 15 ] 徐义贤,王家映. 小波谱及其对谐波信号的刻画能力. 石油地球物理勘探, 1999, **34**(1): 22—28.  
XU Yi Xian, WANG Jia Ying. Wavelet spectrum and its ability to characterize harmonic signals. *Oil Geophysical Prospecting*, 1999, **34**(1): 22—28.
- [ 16 ] Meyers S D, B G. Kelly, J J O' Brien. An introduction to wavelet analysis in oceanography and meteorology: With application to the dispersion of Yanai waves. *Mon. Wea. Rev.*, **121**: 2858—2866.
- [ 17 ] Perrier V T, T Philipovitch, C Basdevant. Wavelet spectra compared to Fourier spectra. *J. Math. Phys.*, 1995, **36**(3): 1506—1519.

## POWER SPECTRUM ESTIMATION FOR MAGNETOTELLURIC SIGNAL BASED ON CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM

XU YI-XIAN WANG JIA-YING

(China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

**[Abstract]** This research aims to improve the accuracy of power spectrum estimation of magnetotelluric signal by using continuous wavelet transform. Three statistic method, global average, wavelet coefficients shrinkaging and significance test, are used to estimate the power spectrum. Empirical formulas are given for the transformation between wavelet scale and Fourier frequency. The algorithm is also described in detail. The numerical tests show that the estimation is robust to stronger white noise and local correlated noise, and significantly decreases the requirement for the recoding length.

**[Key words]** Magnetotelluric signal, Power spectrum estimation, Continuous wavelet transform, Wavelet coefficients shrinkaging, Significance test.