第 47 卷 第 1 期　　地 球 物 理 学 报　　Vol. 47, No. 1
2004 年 1 月　　CHINESE JOURNAL OF GEOPHYSICS　　Jan., 2004

Yu J H. The integral solution of the Dirichlet's boundary value problem on the ellipsoid interface with the accuracy of $O(T^2)$. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2004, **47**(1): 75～80

$O(T^2)$ 精度下椭球界面 Dirichlet 边值问题的积分解

于锦海

中国科学院测量与地球物理研究所,武汉　430077
郑州测绘学院,郑州　450052

摘　要　研究了边界是参考椭球面的 Laplace 方程 Dirichlet 边值问题的求解,在 $O(\varepsilon^4 \cdot T)$ 精度下给出了参考椭球界面上扰动重力位 Dirichlet 外问题的积分解式. 该结果理论上优于目前常用的球近似下的积分解式,从而为研究物理大地测量中边值问题的求解提供了新的依据.

关键词　参考椭球面　边值问题　积分解　椭球谐级数

文章编号　0001-5733(2004)01-0075-06　　**中图分类号**　P226　　**收稿日期**　2002-05-13, 2003-04-26 收修定稿

THE INTEGRAL SOLUTION OF THE DIRICHLET'S BOUNDARY VALUE PROBLEM ON THE ELLIPSOID INTERFACE WITH THE ACCURACY OF $O(T^2)$

YU Jin-Hai

Wuhan Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077, China
Zhengzhou Institute of Surveying and Mapping, Zhengzhou 450052, China

Abstract　The Dirichlet's boundary value problem on the ellipsoid interface is studied in this paper. Under the accuracy of $O(\varepsilon^4 \cdot T)$, the integral solution of the problem is obtained, where ε^2 and T are the second eccentricity of the ellipsoid and the disturbing potential, respectively. The result is better than that of the spherical approximation. It provides a new approach to solve the boundary value problems in physical geodesy.

Key words　Reference ellipsoid, Boundary value problem, Integral solution, Ellipsoidal harmonic series.

1　引　言

椭球界面的情况下,典型的边值问题有

$$\begin{cases} \mathrm{Lap}\, T = 0 & \text{在 } \Sigma \text{ 外}, \\ T|_{\Sigma} = f, & \\ T = O(r^{-1}) & \text{在无穷远处}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 Lap 称为 Laplace 算子, T 是扰动位, Σ 表示 $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 是参考椭球面, a 和 b 分别是长半轴和短半轴, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 是地心距离, f 是由观测数据构成的已知值. 边值问题(1)可由 GPS 结合水准测量得到,即从 GPS 和水准测量观测资料可直接得到大地水准面高,然后利用 Bruns 公式可得边界条件 $T|_{\Sigma}=f$. 由于 Bruns 公式是线性化的结果,故边值问题(1)的精度为 $O(T^2)$. 记 $\varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}$,称为 Σ 的第二偏心率,无量纲,其值约为 0.006. 因为大地水准面高 ζ 可达到 100 m 左右,故从 Bruns

基金项目　人事部回国人员基金.

作者简介　于锦海,男,教授. 1961 年生,1992 年毕业于中国科学院武汉测量与地球物理研究所,获理学博士学位. 现在解放军信息工程大学测绘学院工作. 主要从事大地测量学方面的研究. E-mail: yujinhai2000@yahoo.com

公式可知 T 的相对量级大致是 $\frac{\zeta}{R}=\frac{0.1}{6400}\approx 1.5\times 10^{-5}$,其中 R 是地球平均半径. 由于 $O(\varepsilon^4\cdot T)$ 精度的相对量级小于 10^{-9},因此对于确定如大地水准面这样的几何量而言,其绝对精度理论上可保证小于 $10^{-9}R\approx 0.64$cm,即在厘米量级以内.

单纯从数学上看,椭球界面情形下边值问题(1)的解析解至今仍没有得到,使得物理大地测量学在研究边值问题的解析解时需作球近似假设. 在球近似假设下,边值问题的精度由 $O(T^2)$ 退化到 $O(\varepsilon^2\cdot T)$. 为了顾及扁率的影响,在椭球面下研究边值问题求解是必不可少的,因而椭球谐级数被广泛地应用到边值问题的求解中. Heiskanen 等[1]将以第二类 Legendre 多项式表达的椭球谐级数引入到物理大地测量学中;Hotine[2]导出球谐级数和椭球谐级数之间的转换关系,使得在重力场模型建立中应用椭球边值问题成为现实;Jekeli[3]和 Gleason[4]利用上述转换关系给出了建立重力场模型的详细过程;Thong 等[5]和 Sona[6]都陆续研究了椭球谐函数的表示与计算等问题. 特别是 Yu 等[7]利用解析函数的 Laurent 展开式,给出了与球谐函数相似的椭球谐函数的表达式. 本文将利用该表达式来研究边值问题(1)的积分解. Martinec 等[8]曾讨论积分解的构造,但他们运用了一类不常用的坐标系,同时所得结论只在离地面约10km 范围内有效,这在某种程度上限制了结果的应用. 本文的目标就是在 $O(\varepsilon^4\cdot T)$ 精度下,研究边值问题(1)的积分解. 尽管该解式不是严格数学意义上的解,但顾及到边值问题(1)的来源,该解式可满足大地测量中的精度的要求.

设椭球坐标系 (u,θ,λ),该坐标系与地心直角坐标系 (x,y,z) 的关系为

$$\begin{cases} x=\sqrt{u^2+E^2}\sin\theta\cos\lambda, \\ y=\sqrt{u^2+E^2}\sin\theta\sin\lambda, \\ z=u\cos\theta, \end{cases} \tag{2}$$

式中 $E^2=a^2-b^2$,$\theta\in[0,\pi]$称为归化余纬,$\lambda\in[0,2\pi]$是经度,u 是长度参数. 在坐标系 (u,θ,λ) 下,参考椭球面 Σ 的方程为: $u=b$.

2 若干引理

为简便起见,引入一些记号. 设参考椭球面 Σ 上的函数 $f(\theta,\lambda)$ 有下列椭球谐展开式

$$f(\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[A_{nm}R_{nm}(\theta,\lambda)+B_{nm}S_{nm}(\theta,\lambda)], \tag{3}$$

其中

$$\begin{Bmatrix} R_{nm}(\theta,\lambda) \\ S_{nm}(\theta,\lambda)\end{Bmatrix}=\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\lambda \\ \sin m\lambda\end{Bmatrix}, \tag{4}$$

此处 $\bar{P}_{nm}(t)$ 是连带 Legendre 多项式,使得

$$\iint_\sigma [R_{nm}(\theta,\lambda)]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda = \iint_\sigma [S_{nm}(\theta,\lambda)]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda=1, \tag{5}$$

这里 $\sigma=\{(\theta,\lambda);0\le\theta\le\pi,0\le\lambda\le 2\pi\}$;而 A_{nm} 和 B_{nm} 是展开式系数,其表达式为

$$\begin{Bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm}\end{Bmatrix}=\iint_\sigma\begin{Bmatrix} R_{nm}(\theta,\lambda) \\ S_{nm}(\theta,\lambda)\end{Bmatrix}f(\theta,\lambda)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda. \tag{6}$$

记 $X_{nm}(\theta,\lambda)=A_{nm}R_{nm}(\theta,\lambda)+B_{nm}S_{nm}(\theta,\lambda)$,以及和式 $\sum_{n,m}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}$, $\sum_{n\ge 1,m}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}$ 等,则(3)式可写成

$$f(\theta,\lambda)=\sum_{n,m}X_{nm}(\theta,\lambda). \tag{7}$$

引理1 在 Σ 外满足 Laplace 方程且在无穷远处正则的调和函数 $T(u,\theta,\lambda)$ 可展开成下列椭球谐级数

$$T(u,\theta,\lambda)=\sum_{n,m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{nm}^{(2k+1)}}{\rho^{n+2k+1}}[a_{nm}R_{nm}(\theta,\lambda)+b_{nm}S_{nm}(\theta,\lambda)], \tag{8}$$

其中 $\rho=\frac{u}{b}$, a_{nm} 和 b_{nm} 是 T 的椭球谐系数, $c_{nm}^{(1)}=1$,

$$c_{nm}^{(2k+1)}=-\frac{(n+2k-1)(n+2k)}{2k(2k+2n+1)}c_{nm}^{(2k-1)}-\frac{m^2}{2k(2k+2n+1)}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\varepsilon^{2j}c_{nm}^{(2k-2j+1)}. \tag{9}$$

引理1的证明由文献[7]给出. 若仅考虑到 ε^2 的影响,则(8)式可以简化成

$$T(u,\theta,\lambda)=\sum_{n,m}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\rho^{n+1}}-\frac{(n+1)(n+2)+m^2}{2(2n+3)}\times\frac{\varepsilon^2}{\rho^{n+3}}\right][a_{nm}R_{nm}(\theta,\lambda)+b_{nm}S_{nm}(\theta,\lambda)]. \tag{10}$$

引理2 若 Σ 上 $f(\theta,\lambda)$ 有展开式(7),则忽略 $O(\varepsilon^4)$ 以上量级后,边值问题(1)的解可写成

$$T(u,\theta,\lambda)=\sum_{n,m}\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}}X_{nm}(\theta,\lambda)+\varepsilon^2\frac{u^2-b^2}{u^2}\times\sum_{n,m}\frac{(n+1)(n+2)+m^2}{2(2n+3)}\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}}X_{nm}(\theta,\lambda). \tag{11}$$

引理2的证明可利用在(10)式中令 $u=b$(即 $\rho=1$)、$f(\theta,\lambda)$ 的展开式(3)或(7)以及边界条件 $T|_\Sigma=f$ 得到.

因为论述都是在 Σ 外，故 $u\geq b$. 若 $P_n(t)$ 为 n 阶 Legendre 多项式，则 $u\geq b$ 时有下列关系式.

引理 3　令 $r=\sqrt{u^2-2but+b^2}$，则

$$L_1(u,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{u^{n+1}}P_n(t)=\frac{1}{r},\tag{12}$$

$$L_2(u,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nb^n}{u^{n+1}}P_n(t)=\frac{u(u-bt)}{r^3}-\frac{1}{r},\tag{13}$$

$$L_3(u,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2b^n}{u^{n+1}}P_n(t)=\frac{3u^2(u-bt)^2}{r^5}-\frac{4u^2-3but}{r^3}+\frac{1}{r},\tag{14}$$

$$L_4(u,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{b^n}{u^{n+1}}P_n(t)=\frac{1}{u}\ln\frac{2u}{r+u-bt},\tag{15}$$

$$L_5(u,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{b^n}{u^{n+1}}P_n(t)=-\frac{1}{b}\ln\frac{u(1-t)}{r+b-ut},\tag{16}$$

$$L_6(u,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}\frac{b^n}{u^{n+1}}P_n(t)=\frac{r-u}{b^2}-\frac{ut}{b^2}\ln\frac{u(1-t)}{r+b-ut}.\tag{17}$$

证明：(12)式来源于 Legendre 多项式的性质，这里不给证明(见：文献[11]中公式(1.2)). 至于其余等式，仅以(13)式为例证明之. 事实上，在(12)式中对 u 求导，则有

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)b^n}{u^{n+2}}P_n(t)=-\frac{u-bt}{r^3},\tag{18}$$

由此即得(13)式的证明.

为使下面的推导方便，再引入下列记号和引理.

引理 4

$$L_7(u,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{b^n}{u^{n+1}}P_n'(t)=\frac{\partial}{\partial t}L_4(u,t)=\frac{b(u+r)}{ur(r+u-bt)},\tag{19}$$

$$L_8(u,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{b^n}{u^{n+1}}P_n'(t)=\frac{ut}{b}L_7(u,t)-\frac{u}{br}+\frac{1}{b},\tag{20}$$

$$L_9(u,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\frac{b^n}{u^{n+1}}P_n'(t)=\frac{u^2t^2}{b^2}L_7(u,t)+\frac{u}{b}L_5(u,t)-\frac{u^2t+bu}{b^2r}+\frac{ut}{b^2},\tag{21}$$

$$L_{10}(u,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{u^{n+1}}P_n'(t)=\frac{bu}{r^3}.\tag{22}$$

证明：(19)式的推导直接可由(15)式得到. 下面仅证明(20)式，证明的关键是利用 Legendre 多项式的恒等式(见文献[11]中公式(1.10))：$P_n'(t)=tP_{n+1}'(t)-(n+1)P_{n+1}(t)$. 事实上

$$\begin{aligned}L_8(u,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{b^n}{u^{n+1}}P_n'(t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{b^n}{u^{n+1}}[tP_{n+1}'(t)-(n+1)P_{n+1}(t)]\\&=\frac{ut}{b}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{b^n}{u^{n+1}}P_n'(t)-\frac{u}{b}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^n}{u^{n+1}}P_n(t)\\&=\frac{ut}{b}L_7(u,t)-\frac{u}{br}+\frac{1}{b}.\end{aligned}\tag{23}$$

由此即得引理 4 的证明.

考虑到后面的推导，利用 Legendre 函数的加法性质，易证(见文献[1]中公式(1-71))

$$\sum_{m=0}^{n}X_{nm}(\theta,\lambda)=\frac{2n+1}{4\pi b^2}\iint_{\sigma}P_n(\cos\psi)f(Q)\,d\bar{S}_Q,\tag{24}$$

这里 $Q(b,\theta_Q,\lambda_Q)$ 是 Σ 上的积分变量，$\sigma=\{(\theta_Q,\lambda_Q);0\leq\theta_Q\leq\pi,0\leq\lambda_Q\leq2\pi\}$，$\cos\psi=\cos\theta\cos\theta_Q+\sin\theta\sin\theta_Q\cos(\lambda-\lambda_Q)$，$d\bar{S}_Q=b^2\sin\theta_Q d\theta_Q d\lambda_Q$. 这里变量 ψ 没有几何意义，原因是使用的坐标系是椭球坐标系. 从(7)式和(24)式出发，有

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n}m^2X_{nm}(\theta,\lambda)&=-\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\sum_{m=0}^{n}X_{nm}(\theta,\lambda)\\&=-\frac{2n+1}{4\pi b^2}\iint_{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}P_n(\cos\psi)f(Q)\,d\bar{S}_Q.\end{aligned}\tag{25}$$

令 $t=\cos\psi$，则利用 Legendre 方程可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}P_n(\cos\psi)&=\frac{d^2P_n(t)}{dt^2}[\sin\theta\sin\theta_Q\sin(\lambda-\lambda_Q)]^2-\frac{dP_n(t)}{dt}\sin\theta\sin\theta_Q\cos(\lambda-\lambda_Q)\\&=-C(P,Q)P_n'(t)+n(n+1)D(P,Q)P_n(t),\end{aligned}\tag{26}$$

其中

$$D(P,Q)=-\frac{[\sin\theta\sin\theta_Q\sin(\lambda-\lambda_Q)]^2}{\sin^2\psi},\tag{27}$$

$$C(P,Q)=2\cos\psi D(P,Q)+\sin\theta\sin\theta_Q\cos(\lambda-\lambda_Q).\tag{28}$$

易证：$C(P,Q)$ 和 $D(P,Q)$ 都是有界的，即：$|C(P,Q)|\leq3$，$|D(P,Q)|\leq1$. 综合以上论述，便有

$$\sum_{m=0}^{n}m^2X_{nm}(\theta,\lambda)=\frac{2n+1}{4\pi b^2}\iint_{\sigma}C(P,Q)P_n'(\cos\psi)$$

$$- n(n+1) D(P,Q) P_n(\cos\psi)]f(Q)\,d\bar{S}_Q. \quad (29)$$

(24)式和(29)式在边值问题的级数解转换成积分解的过程中将起着十分重要的作用.

3 边值问题的积分解

从引理 2 可知,在 $O(\varepsilon^2 \cdot T)$ 精度下其解 $T(P)$ 为

$$T(u,\theta,\lambda) = \sum_{n,m} \frac{b^{n+1}}{u^{n+1}} X_{nm}(\theta,\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{8}\frac{u^2-b^2}{u^2} \times \sum_{n,m}\left(2n+3-\frac{1}{2n+3}\right)\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}} X_{nm}(\theta,\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{u^2-b^2}{u^2}\sum_{n,m}\frac{m^2}{2n+3}\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}} X_{nm}(\theta,\lambda). \quad (30)$$

(30)式中含因子$\frac{1}{2n+3}$的项会导致 Weierstrass 椭圆积分的出现,这将使导出的积分表达式变得极为复杂,因此需要事先化简. 由于 $\frac{1}{2n+3} = \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{4(n+1)(n+2)(2n+3)}$,故(30)式可写成

$$T(u,\theta,\lambda) = \sum_{n,m}\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}} X_{nm}(\theta,\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{8}\frac{u^2-b^2}{u^2} \times \sum_{n,m}\left(2n+3-\frac{1}{4}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{n+2}\right)\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}} X_{nm}(\theta,\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{u^2-b^2}{u^2}\sum_{n,m}\frac{m^2}{4}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}} X_{nm}(\theta,\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{32}\frac{u^2-b^2}{u^2}\sum_{n,m}\frac{1}{(n+1)(n+2)(2n+3)}\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}} X_{nm}(\theta,\lambda) - \frac{\varepsilon^2}{8}\frac{u^2-b^2}{u^2}\sum_{n,m}\frac{m^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)}\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}} X_{nm}(\theta,\lambda). \quad (31)$$

在(31)式右端中,主项为第一项,最后二项与主项对应量之比的绝对值小于 $\varepsilon^2\alpha_n$,其中

$$\alpha_n = \frac{1}{8}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)}. \quad (32)$$

对地球而言,$\varepsilon^2 \approx 6\times10^{-3}$. 表 1 列出了 α_n 的部分计算值. 由此可见,(31)式右端最后二项相对于主项的量级为 $O(\varepsilon^4)$,因此在精度 $O(\varepsilon^4\cdot T)$ 下,边值问题(1)的解可写成

$$T(u,\theta,\lambda) = \sum_{n,m}\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}} X_{nm}(\theta,\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{8}\frac{u^2-b^2}{u^2} \times \sum_{n,m}\left(2n+3-\frac{1}{4}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{n+2}\right) \times \frac{b^{n+1}}{u^{n+1}} X_{nm}(\theta,\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{u^2-b^2}{u^2} \times \sum_{n,m}\frac{m^2}{4}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}} X_{nm}(\theta,\lambda)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{n+1}}{u^{n+1}}\frac{2n+1}{4\pi b^2}\iint P_n(\cos\psi) f(Q)\,d\bar{S}_Q + \frac{\varepsilon^2}{8}\frac{u^2-b^2}{u^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+3-\frac{1}{4}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{n+2}\right) \times \frac{b^{n+1}}{u^{n+1}}\frac{2n+1}{4\pi b^2}\iint P_n(\cos\psi) f(Q)\,d\bar{S}_Q + \frac{\varepsilon^2}{8}\frac{u^2-b^2}{u^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \times \frac{b^{n+1}}{u^{n+1}}\frac{2n+1}{4\pi b^2}\iint [C(P,Q) P_n'(\cos\psi) - n(n+1) D(P,Q) P_n(\cos\psi)]f(Q)\,d\bar{S}_Q$$
$$= \frac{1}{4\pi b}\iint[2L_2(u,\cos\psi) + L_1(u,\cos\psi)]f(Q)\,d\bar{S}_Q + \frac{\varepsilon^2}{32}\frac{u^2-b^2}{u^2}\frac{1}{4\pi b}\iint[16L_3(u,\cos\psi)+32L_2(u,\cos\psi) + 8L_1(u,\cos\psi)+L_5(u,\cos\psi)+3L_6(u,\cos\psi)]f(Q)\,d\bar{S}_Q + \frac{\varepsilon^2}{8}\frac{u^2-b^2}{u^2}\frac{1}{4\pi b}\iint\{C(P,Q)[4L_{10}(u,\cos\psi) - L_8(u,\cos\psi) - 2L_9(u,\cos\psi)] - D(P,Q)[4L_3(u,\cos\psi) + 3L_1(u,\cos\psi) - 6L_6(u,\cos\psi)]\}f(Q)\,d\bar{S}_Q. \quad (33)$$

表 1 α_n 的值

Table 1 Some values of α_n

n	1	2	3	4	5	6	7
α_n	0.0042	0.0060	0.0063	0.0064	0.0054	0.0053	0.0050

综合上述结论,便得

定理 1 在 $O(\varepsilon^4\cdot T)$ 精度下,边值问题(1)的解 T 可写成

$$T(P) = \frac{1}{4\pi b}\iint K(P,Q)\,d\bar{S}_Q + \frac{\varepsilon^2}{4\pi b}\iint E(P,Q) f(Q)\,d\bar{S}_Q, \quad (34)$$

其中

$$K(P,Q) = 2L_2(u,\cos\psi) + L_1(u,\cos\psi) = \frac{u^2-b^2}{r^3}, \quad (35)$$

$$E(P,Q) = \frac{u^2-b^2}{32u^2}[16L_3 + 32L_2 + 8L_1 + L_5$$

$$+3L_6](u,\cos\psi)+\frac{u^2-b^2}{8u^2}\{C(P,Q)[4L_{10}-L_8-2L_9](u,\cos\psi)-D(P,Q)[4L_3+3L_1-6L_6](u,\cos\psi)\}=\frac{u^2-b^2}{u^2}\Big[\frac{3u^2(u-b\cos\psi)^2}{2r^5}+\frac{bu\cos\psi-2u^2}{2r^3}-\frac{1}{4r}+\frac{3(r-u)}{32b^2}-\frac{b+3u\cos\psi}{32b^2}\times\ln\frac{u(1-\cos\psi)}{r+b-u\cos\psi}\Big]+\frac{u^2-b^2}{8u^2}C(P,Q)\times\Big[\frac{4u}{r^3}+\frac{2u^2\cos\psi+3bu}{b^2r}-\frac{b+2u\cos\psi}{b^2}-\frac{(r+u)(bu\cos\psi+2u^2\cos^2\psi)}{bur(r+u-b\cos\psi)}+\frac{2u}{b^2}\times\ln\frac{u(1-\cos\psi)}{r+b-u\cos\psi}\Big]+\frac{u^2-b^2}{8u^2}D(P,Q)\times\Big[-\frac{12u^2(u-b\cos\psi)^2}{r^5}+\frac{16u^2-12bu\cos\psi}{r^3}-\frac{7}{r}+\frac{6(r-u)}{b^2}-\frac{6u\cos\psi}{b^2}\ln\frac{u(1-\cos\psi)}{r+b-u\cos\psi}\Big].\tag{36}$$

从定理 1 的结论可得椭球界面 Σ 外 Dirichlet 边值问题(1)的解 T 由主项与含有 ε^2 的项构成,其中主项的核函数 $K(P,Q)$ 的形式与球界面情形下 Poisson 核完全一致,不同之处在于这里使用的是椭球坐标系. 关于核函数 $K(P,Q)$ 和 $E(P,Q)$ 当 P 接近于 Q 时(即: $u\to b$, $\cos\psi\to 1$)的奇异性不同,显然 $K(P,Q)$ 的奇异性与 Poisson 核一致,因而对应的积分有意义;对于 $E(P,Q)$ 而言,从引理 3 和引理 4 可知, $L_1\sim L_{10}$ 中奇异性最高阶为 r^{-3},而 $C(P,Q)$ 和 $D(P,Q)$ 都是有界函数,因而从(36)式可知: $E(P,Q)$ 的奇异性等价于 $(u^2-b^2)r^{-3}$,即: $E(P,Q)$ 的奇异性与 Poisson 核一致,从而对应的积分在数学上也有意义.

利用 Poisson 核的性质,可以发现当 $P\to P_0$ 时(此处 P_0 是边值问题(1)中边界 Σ 上的固定点), (34)式右端第一项的极限等于 $f(P_0)$,因此便有当 $P\to P_0$ 时

$$\iint E(P,Q)f(Q)\,\mathrm{d}\bar{S}_Q\to 0.\tag{37}$$

这就是说,(34)式右端第二项在边界点的计算时,可以不予考虑. 事实上,就 Dirichlet 边值问题本身而言,扰动位 T 在边界上的值是事先给定的,因此真正需要计算的是 $u>b$ 的情况.

4　算　例

通过计算来比较椭球界面上边值问题(1)的积分解(34)式与对应的球近似解的精度. 考虑下列调和函数

$$T=\frac{b}{E}\arctan\frac{E}{u}+\frac{q}{q_0}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right),\tag{38}$$

其中 $q=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{3u^2}{E^2}\right)\arctan\frac{E}{u}-\frac{3u}{E}\right]$, $q_0=q|_{u=b}$. 为尽量与地球的情况相似,取 $b=1$, $E^2=6\times10^{-3}$,则参考椭球面为 $\Sigma: u=1$,而相应的平均半径 $R=\sqrt[3]{1+E^2}$. 从(38)式可得 T 在 Σ 上的边界值为

$$f(\theta,\lambda)=T|_{u=b}=\frac{b}{E}\arctan\frac{E}{b}+\cos^2\theta-\frac{1}{3}.\tag{39}$$

记 α 是余纬,则在 Σ 上有 $\tan^2\alpha=(1+E^2)\tan^2\theta$,即: 在球坐标系 (α,λ) 下

$$f(\alpha,\lambda)=T|_{u=b}=\frac{b}{E}\arctan\frac{E}{b}+\frac{1+E^2}{1+E^2+\tan^2\alpha}-\frac{1}{3},\tag{40}$$

略去 $O(E^4)$ 以上量级,则球近似问题在球面 $r=R$ 上 T 有边界值为

$$f(\alpha,\lambda)=\frac{b}{E}\arctan\frac{E}{b}+\cos^2\alpha+E^2\cos^2\alpha-E^2\cos^4\alpha-\frac{1}{3}.\tag{41}$$

表 2　$u=1.001$ 时 T, T_S, T_E 的值

Table 2　Values of T, T_S and T_E ($u=1.001$)

	$\theta=0$	$\theta=\pi/4$	$\theta=\pi/2$
T	1.66168448	1.16317636	0.66466824
T_S	1.66592907	1.16310044	0.66466965
T_E	1.66166296	1.16316800	0.66467303

表 3　$u=1.01$ 时 T, T_S, T_E 的值

Table 3　Values of T, T_S and T_E ($u=1.01$)

	$\theta=0$	$\theta=\pi/4$	$\theta=\pi/2$
T	1.63528350	1.14993925	0.66459500
T_S	1.63838444	1.14878955	0.66458709
T_E	1.63526277	1.14993110	0.66459943

表 2 和表 3 分别计算了部分 T 的真值,以(39)式作为边界值的椭球解 T_E,和以(41)式作为边界值的球解 T_S. 由表 2 可知, $u=1.001$ 时 T_S 与 T,以及 T_E 与 T 的中误差分别是

$$\begin{cases}\delta_E(u=1.001)=2.45092\times10^{-3},\\ \delta_S(u=1.001)=1.18792\times10^{-5}.\end{cases}\tag{42}$$

由表 3 可知, $u=1.01$ 时 T_S 与 T,以及 T_E 与 T 的中误差分别是

$$\begin{cases} \delta_E(u = 1.01) = 2.45092 \times 10^{-3}, \\ \delta_S(u = 1.01) = 1.31108 \times 10^{-5}. \end{cases} \tag{43}$$

由此可见,利用 T_E 来计算 T 的值要比 T_S 的计算精度要高得多. 椭球界面边值问题的计算精度比球近似边值问题的计算精度在理论上有明显的提高,这里所提及的精度是关于边值问题的理论精度,而在重力场计算和大地水准面确定的实际精度评判中,还包含了许多其他因素,例如:重力的观测精度和观测值的分布、观测数据的处理方法等等.

5 结 论

本文利用物理大地测量中边值问题线性化的特性,在 $O(\varepsilon^4 \cdot T)$ 精度下得到了 Dirichlet 边值问题的积分解式,将该解式用于求解地球重力场比相应球近似解法的精度理论上要高出扁率量级,可满足目前大地测量中的关于精度的要求. 本质上讲,本文给出的解式将物理大地测量中常用的以球谐级数为基础的球近似解和椭球改正合并成了统一的积分解式. 从应用角度看,本文给出的解式不仅在建立重力场整体模型中可反映出球谐级数完整的频谱系数,而且更方便于局部计算.

参考文献

[1] Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy. San Francisco: Wichmann Herbert Freemann, 1967

[2] Hotine M. Mathematical Geodesy, ESSA Monograph No. 2. U. S. Department of Commence, Washington D. C. 1969

[3] Jekeli C. Exact transformation between ellipsoidal and spherical harmonic expansions. *Manu. Geod.*, 1988, **14**: 106～113

[4] Gleason D M. Some notes on the evaluation of ellipsoidal and spherical harmonic coefficients from surface data. *Manu. Geod.*, 1989, **15**:212～225

[5] Thong N C, Grafarend E W. A spheroidal model of the terrestrial gravitational field. *Manu. Geod.*, 1988, **14**: 285～304

[6] Sona G. Numerical problems in the computation of ellipsoidal harmonics. *Jour. of Geod.*, 1996, **70**: 117～126

[7] Yu J H, Cao H S. Elliptical Harmonic series and the original Stokes problem with the boundary of the reference ellipsoid. *Jour. of Geod.*, 1996, **70**: 431～439

[8] Martinec Z, Grafarend E W. Construction of Green's function to the external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution. *Jour. of Geod.*, 1997, **71**: 562～570

[9] Yu J H, Wu X P. The solution of mixed boundary value problem with the reference ellipsoid as boundary. *Jour. of Geod.*, 1997, **71**: 454～460

[10] 党诵诗. 物理大地测量的数学基础. 北京:测绘出版社,1988
Dang S S. The Mathematical Basements for Physical Geodesy. Beijing: Surveying and Mapping Press, 1988

[11] 方 俊. 重力测量与地球形状学(下册). 北京:科学出版社,1973
Fang J. The Gravity Measurements and the Shape of the Earth. Beijing: Science Press, 1973

[12] 朱灼文. 椭球情况的换置. 中国科学(B 辑), 1986, (3) :328～336
Zhu Z W. Alternation in the ellipsoidal case. *Science in China* (series B), 1986, (3) :328～336

[13] 于锦海. 扰动重力位 Poisson 方程椭球 Stokes 边值问题. 中国科学(D 辑), 1997, (3): 214～220
Yu J H. The boundary value problem of Poisson's equation with Stokes' boundary condition. *Science in China* (series D), 1997, (3): 214～220